Hullámcsomag

Elektronhullámot egy függvénnyel írjuk le.

$\hat{u}(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ egy 1D-ős hullámot leíró fgv.

$u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$

komplex hullám $\hat{u}(x,t) = \mathrm{Im}(u(x,t))$
ennek a képzetes része a hullámfgv, csak egyszerűsített jelölés miatt írjuk $e^{i\varphi}$ alakban.

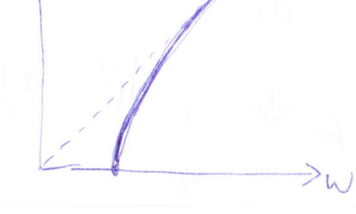
Ez egy síkhullám. Kiterjedése végtelen.
Az elektron viszont véges méretű. Az áram esetén, Millikan kísérletben, elektrolízis során is látszik ez.

Síkhullám lokalizálása → Hullámcsomag.
Sok ω-jú hullámot lineárisan összeadunk.
Minden ω-hoz a k kiszámolható

$\left.\begin{array}{l}\hbar\omega = E\\ \hbar k = p\end{array}\right\}$ alapján egy elektronra: $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

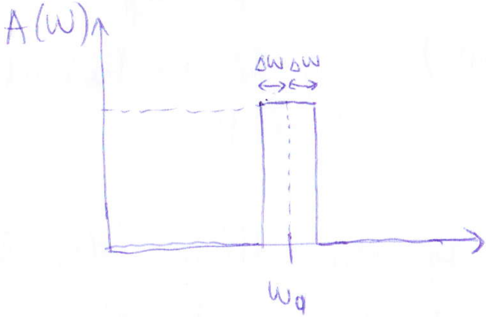
$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2k^2c^2 + m_0^2c^4$$

Ebből kiszámolhatók: k-ból → ω
ω-ból → k (oda-vissza)



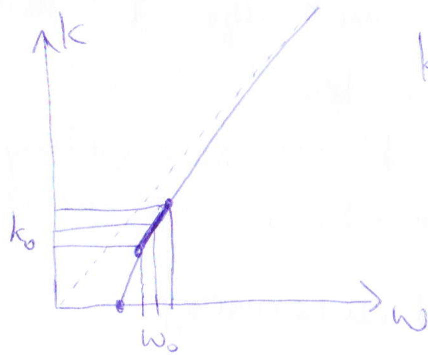
$$H(x,t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega)\, e^{i(k(\omega)\cdot x-\omega t)}\, d\omega$$

Csináljunk egy ω_0, k_0 paraméterű síkhullámhoz hasonló hullámcsomagot.



Azonos amplitudóval $\omega_0 - \Delta\omega = \omega_1$-től $\omega_0 + \Delta\omega = \omega_2$-ig összeadjuk az egyes síkhullámokat.

Közben k is változik k_0 körül.



$k(\omega)$ fgv-t LINEÁRISNAK TEKINTJÜK

$$k = k_0 + \frac{\Delta k}{\Delta\omega}(\omega - \omega_0)$$

Ezeket behelyettesítve:

$$H(x,t) = \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} A\, e^{i\left(k_0 x + \frac{\Delta k}{\Delta\omega}(\omega-\omega_0)x - \omega t\right)}\, d\omega$$

$\omega' = \omega - \omega_0$ jelölésre áttérünk $(\omega = \omega_0 + \omega')$ $(d\omega' = d\omega)$

$$H(x,t) = \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} A\, e^{i\left(k_0 x + \frac{\Delta k}{\Delta\omega}\omega' x - \omega_0 t - \omega' t\right)}\, d\omega' =$$

$$= A e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i\left(\frac{\Delta k}{\Delta\omega}\omega' x - \omega' t\right)}\, d\omega' = A e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i\left(\frac{\Delta k}{\Delta\omega}x - t\right)\omega'}\, d\omega'$$

Legyen $\tau = \frac{\Delta k}{\Delta \omega} \cdot x - t$ -vel jelölve:

$$H(x,t) = A e^{i(k_0 x - \omega t)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i\tau\omega'} d\omega' =$$

$$= A e^{i(k_0 x - \omega t)} \left[\frac{e^{i\tau\omega'}}{i\tau} \right]_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} = A e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{e^{i\tau\Delta\omega} - e^{-i\tau\Delta\omega}}{i\tau}$$

$$= A e^{i(k_0 x - \omega t)} \frac{\cos(\tau\Delta\omega) + i\sin(\tau\Delta\omega) - [\cos(-\tau\Delta\omega) + i\sin(-\tau\Delta\omega)]}{i\tau} =$$

$$= A\Delta\omega\, e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\cos(\tau\Delta\omega) + i\sin(\tau\Delta\omega) - \cos(\tau\Delta\omega) + i\sin(\tau\Delta\omega)}{i\tau\Delta\omega} =$$

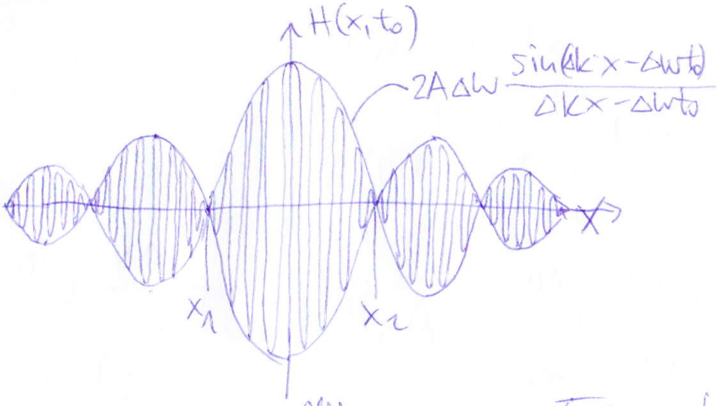
$$= A\Delta\omega \cdot 2 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\sin(\tau\Delta\omega)}{\underset{\uparrow \text{ valós szám}}{\tau\Delta\omega}} = 2A\Delta\omega\, e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\sin(\Delta k x - \Delta\omega t)}{\Delta k \cdot x - \Delta\omega t} =$$

$$H(x,t) = \underbrace{2A\Delta\omega \cdot \frac{\sin(\Delta k \cdot x - \Delta\omega t)}{\Delta k \cdot x - \Delta\omega t}}_{\substack{\text{hely és időtől függő} \\ \text{de lassan változó amplitudója} \\ \text{a } k_0, \omega_0 \text{ síkhullámnak}}} \cdot e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

Mennyivel megy ez a csomag? Az amplitudó maximuma hol van az egyes tidőpillanatokban?

$\sin(\varphi) = 1$ ha $\varphi = \pi/2 \rightsquigarrow \Delta k \cdot x_1 - \Delta\omega t_1 = \pi/2$ $\quad \Delta t$ idő múlva

$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow \Delta k \cdot x_2 - \Delta\omega t_2 = \pi/2 \Rightarrow \Delta k(x_2 - x_1) - \Delta\omega \cdot \Delta t = 0 \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = V_{cs}$



$x = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t_0$

Ez a hullámcsomag.

x_1 és x_2 zérushelyek:

$$\sin(\Delta k \cdot x - \Delta\omega t_0) = 0 \rightsquigarrow \begin{aligned} \Delta k \cdot x_1 - \Delta\omega t_0 &= -\pi \\ \Delta k x_2 - \Delta\omega t_0 &= +\pi \end{aligned}$$

A kettőt kivonjuk egymásból:

$$\Delta k (x_2 - x_1) = 2\pi \qquad x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

k fizikai jelentése p (impulzus, lendület)

$$\hbar k = p \rightsquigarrow \qquad \Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \quad \text{és} \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

így $\qquad \Delta p \cdot \Delta x = \hbar \qquad$ Ez a Heisenberg-féle határozatlansági reláció sp. esete.

Általánosan $\qquad \Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$