A gyenge kölcsönhatás az atommagokban

1. Példák β-bomlásokra. Ismétlés a Mag- és részecskefizika óráról.

a) Λ^0-részecske elbomlása, Σ^0-részecske elbomlása. Mindkét mikrorészecskében a valencia kvarkok ízei: uds. Bomlásuk reakcióegyenlete $\Lambda^0 \to p^+ + \pi^-$. A kvark képben: $uds \to uud + u\bar{d}$. Az s kvark átalakult u kvarkká és keletkezett egy u és egy $\bar{d}$ kvark. Ennek eredete egy W^- közvetítő bozon keletkezése, ami a gyenge kölcsönhatás lényege. $uds \to udu + W^- \to uud + u\bar{d}$. Ilyenkor a W két kvarkra bomlik el, ezért hadronikus gyenge kölcsönhatásnak hívjuk.

A Λ^0 elbomolhat más módokon is, például úgy, hogy a W bozon nem kvarkokra, hanem leptonokra esik szét. $uds \to udu + W^- \to uud + e^- + \tilde{\nu}_e$. Ekkor hadronok és leptonok is részt vesznek a gyenge kölcsönhatásban, ezért ennek neve szemileptonikus gyenge kölcsönhatás.

b) Másik részecskefizikai eset a müon-bomlása elektronná. $\mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$. Ebben az esetben a nyugalmi tömeg megváltozását szintén egy W bozon keletkezése kíséri. $\mu^- \to \nu_\mu + W^-$. Megjegyezzük, hogy a nyugalmi tömeg megváltozása során a részecskecsalád nem változott meg, ez a müonikus leptonszám megmaradásának ellenőrzésével jegyezhető meg. A müon tömege 105,6 MeV, ez kisebb a legkisebb kvarkot tartalmazó erősen kölcsönható zsák (pion) nyugalmi energiájánál (139,6 MeV), ezért a müon béta-bomlásakor nem tudnak hadronok keletkezni, ez tiszta leptonikus gyenge kölcsönhatás.

c) A neutron béta-bomlása. $udd \to udu + W^- \to uud + e^- + \tilde{\nu}_e$. Ilyenkor d kvark alakul át u kvarkká, és a W bozon leptonokra esik szét. Ez is szemileptonikus gyenge kölcsönhatás, hiszen kvarkok és leptonok is szerepelnek a folyamatban. A folyamat lényeges része a $d \to u + W^-$ folyamat, ez a gyenge kölcsönhatás első lépése. A második lépés a W bomlása. Az u és d kvarkok közötti tömegkülönbség olyan kicsi, hogy ilyenkor sem tudnak kvarkok keletkezni.

Ha az u és d kvarkok egy bonyolultabb rendszer részei, azaz egy atommagban vannak, akkor a spontán átalakuláskor, amikor a d kvark spontán alakul át u kvarkká, nem tud az atommag szerkezete úgy átalakulni az esetek döntő részében, hogy 140 MeV át tudjon rendeződni és hadronikus gyenge kölcsönhatás történjen. Az atommagokban előforduló gyenge kölcsönhatás során szemileptonikus gyenge kölcsönhatás megy végbe. Sőt az energiák a müon, keltésére sem elegendők, ezért mindig elektron/pozitron és antineutrínó/neutrínó keletkezik.

d) A ^{22}Na atommagjában 11 proton mellett 11 neutron helyezkedik el. Ez alapjában véve egy optimális elrendezés, mert a félempirikus kötési formula szimmetria tagja nem gyengíti a kötési energiát. De mégis van ennél kötöttebb rendszer, ha 10 proton és 12 neutron alkotja a 22 nukleon halmazát. Ilyenkor a protonok és a neutronok is párosával tudnak elhelyezkedni, ami erősíti a kötést. Ilyenkor a 11. proton átalakulása a 12. neutronná energianyereséget jelent. Ez a ^{22}Na pozitív béta-bomlása során megy végbe.

$$^{22}Na \to ^{22}Ne + e^+ + \nu_e$$

Ilyenkor egy nagyobb nyugalmi tömegű neutron keletkezik, de a magszerkezet átrendeződése még így is energianyereséget okoz. Ilyen külső magerő térben a $u \to d + W^+$ gyenge kölcsönhatás által vezérelt folyamat megy végbe, amit a W leptonikus bomlása követ.

e) További fontos béta-bomló atommagok: ^{3}H, ^{14}C, ^{40}K, ^{214}Bi. Ezek az atommagok a természetben előfordulnak. H, C, K a szerves anyagokban is jelen van, ezert ezek radioaktív izotópjai az ember és más élő anyag természetes radioaktivitásának a forrásai. Mind a négy izotóp bomlik negatív béta-bomlással, amikor

egy neutron átalakul protonná. Érdekes, hogy a ^{40}K mindkét béta-bomlásra képes.

$$^{40}K \rightarrow ^{40}Ca + e^- + \tilde{\nu}_e \qquad \text{és} \qquad ^{40}K + e^- \rightarrow ^{40}Ar^* + \nu_e$$

Összefoglalás:

A béta-bomlás lényeges mozzanata, amikor egy kvark vagy egy lepton nyugalmi tömege (íze) megváltozik és egy W bozon keletkezik. A W bozon vagy kvark-antikvark párra bomlik, vagy elektron-neutrínó párra. A gyenge kölcsönhatásban keletkezhet semleges közvetítő részecske is, de ennek valószínűsége kisebb, és az atommagokban az $u \rightarrow d$ és $d \rightarrow u$ folyamatok során nem tud keletkezni, mert a kvarkok töltése nem azonos.

2. Béta-bomlás fajtái és szintjei

Az atommagokon belül lezajló β-bomlások alapfolyamatai az

$$u \rightarrow d + W^- \qquad \text{és a} \qquad d \rightarrow u + W^+$$

folyamatok. Ez első egy proton átalakulását okozza neutronná, a második egy neutron átalakulását protonná az atommagon belül. A második folyamat ($p \rightarrow n$) csak a magszerkezet olyan átalakulása mellett lehetséges, amikor a neutron nagyobb nyugalmi energiáját a magerők átrendeződése miatti nagyobb kötési energia képes fedezni. Az atommagon belül a W-bozon csak leptonikusan tud elbomlani, két kvarkra bomláshoz nincs elég energia. A legkisebb kvark-antikvark pár a hozzá tartozó gluontérrel együtt minimum 150 MeV energiát igényel, ami ilyenkor nem elérhető. Így a β-bomlás nukleon szinten lejátszódó két alapfolyamata:

$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e \qquad n \rightarrow p^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$$

$$Q : 1 = 0 + 1 + 0 \qquad 0 = 1 - 1 + 0$$

$$L_e : 0 = 0 - 1 + 1 \qquad 0 = 0 + 1 - 1$$

$$B : 1 = 1 + 0 + 0 \qquad 1 = 1 + 0 + 0$$

Ezekben a folyamatokban az elektromos töltés, elektronikus leptonszám és a barionszám megmaradó mennyiségek.

A két leptont ezen megmaradási törvényeknek megfelelően át lehet rendezni az egyenlet másik oldalára, amikor is az antirészecskéik jelennek meg a másik oldalon. Így alakulnak ki az elektron- és a pozitron befogás folyamatai:

$$e^- + p^+ \rightarrow n + \nu_e \qquad e^+ + n \rightarrow p^+ + \tilde{\nu}_e$$

A pozitron jelenléte nem szokásos, de az atomi elektronok gyakran befogódnak az atommagba, és a protonokat átalakítják neutronokká. Ez azért van, mert az atomi elektronok hullámfüggvénye átfed az atommag hullámfüggvényével.

Amikor a neutrínókat tesszük át a bal oldalra, akkor az inverz-β-bomlásokat kapjuk.

$$\tilde{\nu}_e + p^+ \rightarrow n + e^+ \qquad \nu_e + n \rightarrow p^+ + e^-$$

Ezek azt mutatják, hogy egy anti-elektronneutrínó egy protont át tud alakítani béta-bomlás során, egy W-bozon segítségével neutronná, de egy sima elektronneutrínó ilyen reakciót nem tud indukálni a töltés és az elektronikus leptonszám egyszerre történő megmaradásának kényszere miatt. A másik oldalról a sima neutrínó átalakítja a neutront protonná, de a protonnal nem tud ilyen formán kölcsönhatni. Ezt a különbséget a nagy neutrínó-detektorokban évek óta tapasztalják.

A béta-bomlás során lejátszódó tipikus folyamat a negatív-béta-bomlás esete: $A \rightarrow L + e^- + \tilde{\nu}$

Ez a béta-bomlás az atommagok szintjén. Ebben az energiamegmaradást felírva: $m_A c^2 = m_L c^2 + m_e c^2 + m_\nu c^2 + E_0$. A neutrínó tömege mai ismereteink szerint nem 0, de a jelen esetben ezt elhanyagoljuk. A jobb oldalon így is három tag szerepel.

A béta-bomlás során keletkező elektronok vagy pozitronok energiája nem egy adott érték általában. A negatív és pozitív béta bomláskor neutrínó is keletkezik és ez is el tud vinni egy kis energiát, a három részecske osztozik a reakcióban keletkező energián, ezért a spektrum folytonos. Az elektron befogásnál a végállapotban két részecske van, és fennáll a lendület és az energiamegmaradás tétele, ezért kiszámolhatók a neutrínó és a visszalökődő mag energiái. Kezdetben az elektronnak sincs lendülete.

3. A béta-bomlás Fermi-elmélete

A β^--bomlás során lejátszódó folyamat: $A \to L + e^- + \tilde{\nu}$. A béta-bomlás Fermi-elméletének felhasználásával az elektronok mozgási energia-spektrumát akarjuk megmagyarázni. Teljesen analóg gondolatmenet alkalmazható a pozitron-bomlás esetére a pozitron energiaeloszlásának leírására, de mi most a negatív-béta-bomlás esetét vizsgáljuk csak.

Korábbi tanulmányainkból ismerjük, hogy a β^--bomlásban az elektron energiáját mérve egy folytonos eloszlást kapunk, ami elvezetett a neutrínók feltételezéséhez (Wolfgang Pauli) majd a neutrínók felfedezéséhez (Szalay–Csikai-kísérlet, Reines–Cowan-kísérlet, Raymond Davis kísérlete).

Az elmélet abból indul ki, hogy a gyenge kölcsönhatás H_β-operátora egy perturbáció csak a rendszer teljes energiájához képest, és az időfüggő perturbációszámításban levezetett Fermi-féle Aranyszabály alkalmazható. Eszerint a w időegységre jutó átmeneti valószínűség a kezdeti (k) állapotból a (v) végállapotba:

$$w_{k\to v} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle\right|^2 \varrho(E_v)$$

3.1. A $H_{vk} = \langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle$ kiszámítása

$\Psi_k = \Phi_k(\underline{r})$ az atommag hullámfüggvénye kezdetben, Ψ_v végállapoti hullámfüggvényben kettővel több változó szerepel, hiszen a kölcsönhatás során, ennek időfüggését most nem tárgyalva, két új részecske keletkezik: az elektron és az antineutrínó. Így a Ψ_v három részből áll: $\Phi_v(\underline{r})$ az atommag hullámfüggvénye a bomlás után. $\varphi_e(\underline{r}_e)$ az elektron hullámfüggvénye, $\varphi_\nu(\underline{r}_\nu)$ az antineutrínó hullamfüggvénye. A három részecske egymással nem hat kölcsön, ezért a hullámfüggvény a avégén szorzat alakban írható: $\Psi_v = \Phi_v(\underline{r})\varphi_e(\underline{r}_e)\varphi_\nu(\underline{r}_\nu)$

1. közelítés: Az elektron és a neutrínó hullámfüggvényeit nemrelativisztikus síkhullámnak kezeljük. Ezzel az atommag és az elektron vonzását elhanyagoltuk. Később ezt a Fermi-függvény bevezetésével fogjuk korrigálni. A neutrínó tényleg síkhullám.

$$\varphi_e(\underline{r}_e) = N_e e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}_e \underline{r}_e} \qquad \text{és} \qquad \varphi_\nu(\underline{r}_\nu) = N_\nu e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}_\nu \underline{r}_\nu}$$

Ezzel az aranyszabályban lévő szendvics:

$$H_{vk} = \langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle = \int \Psi_v^* H_\beta \Psi_k dr^3 dr_e^3 dr_\nu^3$$

A H_β gyenge kölcsönhatást leíró operátort ebben az elméletben egyszerűen így írjuk fel:

$$H_\beta = g\delta(\underline{r} - \underline{r}_e)\delta(\underline{r} - \underline{r}_\nu).$$

Ez azért tehető meg, mert a gyenge kölcsönhatás egy erősen lokális kölcsönhatás, a közvetítő W bozon tömege óriási 80,4 GeV, ami egy teljes vas atom tömegénél is nagyobb. Ezzel a szendvics:

$$H_{vk} = \langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle = \int \Phi_v(\underline{r})^* \varphi_e^*(\underline{r}_e) \varphi_\nu^*(\underline{r}_\nu)^* g \delta(\underline{r} - \underline{r}_e) \delta(\underline{r} - \underline{r}_\nu) \Phi_k(\underline{r}) dr^3 dr_e^3 dr_\nu^3 =$$

kiintegráljuk a Dirac-deltákat és behelyettesítjük a síkhullámokat

$$= g \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) \varphi_e^*(\underline{r}) \varphi_\nu^*(\underline{r})^* dr^3 = g \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) N_e e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p}_e \underline{r}} N_\nu e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p}_\nu \underline{r}} dr^3 \qquad \text{és} \qquad N_\ell = N_e \cdot N_\nu$$

Az $N_\ell = \frac{1}{V}$ a leptonok normálási konstansa. (Már ahogy a síkhullámot lehet normálni...)

A $\underline{p}_e \underline{r}$ szorzat maximális értéke $p_e R$ az integrálás során, hiszen az integrálás a teljes térre történik, de az atommagok hullámfüggvénye néhány fm sugáron belül különbözik csak lényegesen a 0-tól. Ezért az atommagok sugarát használva és egy tipikus béta-bomlás energiát, a $p_e R$ szorzat felső becslése megadható.

E=5 MeV, akkor $p_e c \simeq \sqrt{24,5} MeV$, emiatt $\frac{p_e R}{\hbar} < \frac{5 MeV 4 fm}{\hbar c} \simeq \frac{20}{200} = \frac{1}{10} \ll 1$. Ez igaz a neutrínóra is, ezért a síkhullám sorba fejthető.

$$H_{vk} = \frac{g}{V} \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) (1 + \frac{i}{\hbar} (\underline{p}_e + \underline{p}_\nu) \underline{r} + ...) dr^3 =$$

$$= \frac{g}{V} \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) dr^3 + \frac{g}{V} \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) \frac{i}{\hbar} (\underline{p}_e + \underline{p}_\nu) \underline{r} dr^3 + ... = \frac{g}{V} M_{kv} + \frac{g}{V} M_{kv}^{(1)} + ...$$

Az első tag integrálját hívjuk magmátrixelemnek (M).

$$M = M_{kv} = \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) dr^3$$

Amennyiben ez nem 0, akkor a síkhullám sorfejtésének második és a további tagjai elhanyagolhatóan kicsik. Az ilyen eseteket megengedett átmenetnek hívjuk. Később a megengedett átmenetek egy másik definícióját fogjuk megadni, amikor a két lepton pályaperdülete 0. A két definíció ugyanarra az eredményre vezet.

Ha a magmátrixelem kb. 0, akkor a második tag ($M_{kv}^{(1)}$) adhatja a fő járulékot.

$$M_{kv}^{(1)} = \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) \frac{i}{\hbar} (\underline{p}_e + \underline{p}_\nu) \underline{r} dr^3 = \frac{i}{\hbar} (\underline{p}_e + \underline{p}_\nu) \int \Phi_v(\underline{r})^* \Phi_k(\underline{r}) \underline{r} dr^3$$

Ilyenkor az atommag hullámfüggvénye a kezdeti és a végállapotban ortogonális, ezért 0 a magmátrixelem. De ha $\underline{r}$-rel megszorozva az integrandust, már véges járulékot kapunk, akkor első rendben tiltott átmenetnek nevezzük a folyamatot.

Az átmenet megengedett, ha az elektron és a neutrínó nem visz el pályaperdületet, és a kezdeti és a végmag spinjei azonosak. Az itt leírt gondolatmenet Fermi eredeti cikkének egyszerűsített változata, és az ún. Fermi-típusú átmeneteket írja csak le. Mindjárt látjuk, hogy van még egy másik típus is, amit az 5. fejezetben világítunk meg jobban. Amennyiben ℓ kvantumnyi perdületet visz el a két lepton, akkor ℓ-ed rendben tiltott átmenetről beszélünk.

2. közelítés Megengedett átmeneteket vizsgálunk csak.

Ilyenkor H_{kv}=konstans, azaz nem függ a $\underline{p}_e$ és a $\underline{p}_\nu$ vektoroktól, amelyek az elektron energiájától való függést jelentenének. Ilyenkor az elektron és a neutrínó teljes pálya-perdülete ℓ=0.

Ha nem megengedett átmeneteket írunk le, akkor a mátrixelem értéke függ a kirepülő elektron energiájától: $|H_{kv}|^2$ = S(Z,E). Ezt a függvényt alakfaktornak hívjuk és a tiltottság fokától (t) függően az ($M_{kv}^{(t)}$) határozza

meg. (Shape factor, az energiaeloszlás alakjára utalva.) Ilyenkor a megengedett átmenetben kiszámolt energiaspektrum alakját ezzel az S(Z,E) függvénnyel korrigálni kell. Az alakfaktor kiszámolásakor ℓ=1 esetén, az elektron és a neutrínó síkhullámnak tekintett hullámfüggvényének sorbafejtése során a második tagig kell elmenni és az alakfaktor a $(\underline{p}_e + \underline{p}_\nu)^2$ energiafüggését örökli. Ez az $(M_{kv}^{(1)})$ formulájából látszik.

Ezzel az aranyszabályban szereplő $|H_{kv}|^2 = g^2 M^2/V^2$.

Megjegyzés: A béta-bomlás általánosabb relativisztikus leírásában a Dirac-egyenletnek eleget tevő négy komponensű bispinorokkal jellemezzük az elektront és a neutrínót és az egyszerű lokális kölcsönhatást már nem egy számmal jellemezzük, hanem a Lorenz-transzformáció során invariánsan transzformálódó gamma-mátrix-kombinációk is fontosak lesznek. A béta-bomlások részletes vizsgálata kimutatta (például Telegdi Bálint mérései), hogy ezen kombinációk közül a vektor- és az axiálvektor-típusú (Lorentz-transzformációval, így transzformálódó) kölcsönhatást leíró esetek valósulnak meg, a skalár és a tenzor eset nem (a pszeudoskalár esetet még könnyebb kizárni). Ezért igazából az aranyszabályban lévő szendvics két tagból áll egy Fermi-típusú (vektor kölcsönhatás) és egy Gamow–Teller-típusú (axiálvektor kölcsönhatás) tagból. Ezekről a kiválasztási szabályok fejezetében röviden további említést teszünk (Az óra időkereteibe nem fér be több.) Ebben a relativisztikus tárgyalásban a hullámfüggvények spinfüggése is fontos, és a kölcsönhatási operátor alakja: $H_\beta = g_V \tau + g_{GT} \sigma \tau$.

$|H_{kv}|^2 = \left(g_V^2 M_F^2 + g_A^2 M_{GT}^2\right) \frac{1}{V^2}$.

A g_V a vektor típusú kölcsönhatás csatolási állandója, g_A az axiálvektor kölcsönhatásé. Az M_F és az M_{GT} magmátrixelemek a Fermi- és a Gamow–Teller-típusú átmeneteket jelzik, amit az 5. fejezetben fogunk rendesebben definiálni.

3.2. A végállapoti állapotsűrűség

A végállapotban szereplő leányelem visszalökődési energiája $E_V \ll E_0$. Ezért a végállapotok lehetséges számát első sorban az elektron és a neutrínó állapotainak száma határozza meg. Ezek síkhullámok, ezért az impulzus vektoruk határozza meg az állapotukat.

3. közelítés A leánymag visszalökődési energiája 0.

A béta-bomlás során lejátszódó folyamatban az energiák alakulása: $A \to L + e^- + \tilde{\nu}$. $E_V + E + E_\nu = E_0$, az impulzusmegmaradás tétele miatt $p_V = |\underline{p}_e + \underline{p}_\nu|$, és $E_V = \frac{p_V^2}{2m_L}$. De $m_L c^2 \gg E_0 > p_e c$ miatt E_V nagyon kicsi lesz. Ezért elhagyjuk. Így $E_0 = E + E_\nu$.

4. közelítés A neutrínó és az elektron kirepülési szöge egymástól független Ez a számolás elvégezhetősége miatt szükséges feltétel. A részletes elméletben a neutrínó és az elektron kirepülési szögének korrelációját több kísérlet is meghatározta.

Ha a két lepton iránya független akkor a végállapot állapotait egyszerűbben tudjuk számolni. Adott energiájú elektronhoz megvizsgáljuk az összes lehetséges irányt,az ezeknek megfelelő állapotok számát. $E_0 = E + E_\nu$ miatt, $E_\nu = E_0 - E$ egyértelműen kiszámolható, azaz a neutrínó energiája is ismert. A neutrínó lehetséges irányaihoz tartozó állapotok azonban függetlenek az elektron állapotoktól, ezért a teljes állapotok száma szorzat alakban áll elő.

5. közelítés A neutrínó nyugalmi tömege 0.

Mivel síkhullámokkal dolgozunk, és egyenlő valószínűségű minden végállapot, ezért az impulzustérben egyenletesen vannak a végállapotok.

Egy állapot térfogatát a Heisenberg-féle határozatlansági relációból kapjuk meg. $V_1 = \Delta p^3$, emellett $\Delta p \Delta x =$

h, ezért $V_1 = \Delta p^3 = h^3/\Delta x^3 = h^3/V$. Itt a V a rendes térbeli téfogat. (A hat dimenziós fázistérben az elemi állapothoz tartozó cella térfogata h^3.)

Ezek után az adott leszámlálandó állapotok fázistérbeli térfogata osztva a V_1-gyel adja az állapotok számát.

Egy adott energiájú elektronhoz tartozó fázistérfogat: $4\pi p^2 dp$, ezért az ebben lévő állapotok száma

$$dn_e = \frac{4\pi p_e^2 dp_e}{h^3/V}.$$

Neutrínókra hasonló módon:

$$dn_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^3/V}.$$

Az egymástól független irányok esetén az összes állapot száma, ami E elektronenergiához és $E_\nu = E_0 - E$ neutrínóenergiához bármilyen irányban tartozik:

$$dn(E, E_\nu) = dn_e dn_\nu = \frac{4\pi p_e^2 dp_e}{h^3/V}\frac{4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^3/V} = \left(\frac{4\pi V}{h^3}\right)^2 p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} dE dE_\nu$$

Ez egy kétváltozós függvény $f(E, E_\nu)$. Minden lehetséges E_ν energiára kell integráljunk ahhoz, hogy egyváltozós eloszlást kapjunk. Az energiamegmaradást úgy kell érvényesíteni, hogy $\delta(E_\nu - E - E_0)$ -val beszorozva integrálunk minden E_ν-re.

$$dn(E) = \int_{E_\nu} \left(\frac{4\pi V}{h^3}\right)^2 p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \delta(E_\nu - E - E_0) dE dE_\nu = \left(\frac{4\pi V}{h^3}\right)^2 p_e^2 \frac{dp_e}{dE}\, p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu}\bigg|_{E\nu = E_0 - E} dE$$

Térjünk át $\hbar$-ra: $h = \hbar 2\pi$. Ennek visszahelyettesítésével:

$$\frac{4\pi V}{h^3} = \frac{4\pi V}{8\pi^3\hbar^3} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}$$

Emiatt az állapotsűrűség

$$\frac{dn}{dE}(E) = \left(\frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\right)^2 p_e^2 \frac{dp_e}{dE}\, p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu}\bigg|_{E\nu = E_0 - E}$$

A neutrínót már ultrarelativisztikusnak tekintettük: $p_\nu = \frac{E_\nu}{c}$ és $\frac{dp_\nu}{dE_\nu} = \frac{1}{c}$.

Az elektronra a relativisztikus energiaformulát használjuk: $p_e = \frac{1}{c}\sqrt{E_{tot}^2 - m_e^2 c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{(m_e c^2 + E)^2 - m_e^2 c^4}$ és $\frac{dp_e}{dE} = \frac{1}{c}\frac{1}{2}\frac{2(m_e c^2 + E)}{\sqrt{(m_e c^2 + E)^2 - m_e^2 c^4}} = \frac{1}{c}\frac{(m_e c^2 + E)}{\sqrt{(m_e c^2 + E)^2 - m_e^2 c^4}} = \frac{1}{c}\frac{E_{tot}}{p_e c}$. Így:

$$\frac{dn}{dE}(E) = \left(\frac{V}{2\pi^2\hbar^3}\right)^2 \frac{(m_e c^2 + E)^2 - m_e^2 c^4}{c^3} \frac{m_e c^2 + E}{\sqrt{(m_e c^2 + E)^2 - m_e^2 c^4}} (E_0 - E)^2 \frac{1}{c^3}$$

$$\frac{dn}{dE}(E) = \left(\frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3}\right)^2 \sqrt{(m_e c^2 + E)^2 - m_e^2 c^4}\left(m_e c^2 + E\right)(E_0 - E)^2 = \left(\frac{4\pi V}{\hbar^3 c^3}\right)^2 p_e c E_{tot} (E_0 - E)^2$$

Ezzel az átmeneti valószínűség egy dE elektron mozgási-energia-intervallumban:

$$w(E)dE = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{g^2 M^2}{V^2}\left(\frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3}\right)^2 \sqrt{E(2m_e c^2 + E)}\left(m_e c^2 + E\right)(E_0 - E)^2 dE =$$

$$= g^2 M^2 \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \sqrt{E(2m_e c^2 + E)} \left(m_e c^2 + E\right) (E_0 - E)^2 \, dE = g^2 M^2 \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} p_e c E_{tot} \, (E_0 - E)^2 \, dE$$

Megjegyezzük, hogy a V a nem ismert véges, de nagy térfogat kiesett. Általános esetben, amikor az elektron hullámfüggvénye egy pozitív energiájú, Coulomb-potenciálban levő állapot (szórási állapot), akkor még egy korrekciós tényező is bejön, a Fermi-függvény: $F(Z, E)$, nem megengedett átmeneteknél M^2 helyére $M^2(E) = S(Z, E)$ alakfaktort írjuk. Így:

$$w(E)dE = g^2 \frac{F(Z, E) S(Z, E)}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \sqrt{E(2m_e c^2 + E)} \left(m_e c^2 + E\right) (E_0 - E)^2 \, dE$$

Ennek az összes elektron mozgási energiára vett integrálja megadja a bomlási állandót.

$$\lambda = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} g^2 \int_0^{E_0} F(Z, E) S(Z, E) \sqrt{E(2m_e c^2 + E)} \left(m_e c^2 + E\right) (E_0 - E)^2 \, dE$$

Maradjunk megengedett átmeneteknél.

$$\lambda = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} g^2 M^2 \int_0^{E_0} F(Z, E) \sqrt{E(2m_e c^2 + E)} \left(m_e c^2 + E\right) (E_0 - E)^2 \, dE$$

Ekkor az összefüggés integrál része elméleti számításokkal numerikusan kiszámítható. Nem megengedett átmeneteknél is számolhatunk magállapotok közötti átfedési integrált ($M_{vk}^{(t)}$), de ezek erősen modellfüggőek és nehezek. A megengedett átmenetekre szorítkozás előnyös most az integrál elvégezhetősége szempontjából.

4. Összehasonlító élettartam, $\log f\tau$

Megengedett átmenetekre a fentebb meghatározott $w(E)dE$ függvényében ki tudjuk számolni a g és az M^2 kivételével az összes függvényt, ismert E_0 és Z esetén, a bomlási állandót megadó összefüggés integrálja elvégezhető numerikusan.

Definiáljuk azt a dimenziótlan $f(Z, E_0)$ függvényt (Fermi-integrál), ami a fenti az elvégezhető integrál konstans szorosa. Ez magában foglalja a végállapot-sűrűség energiafüggését, az atommag vonzásának hatásai miatti Fermi-függvényt. A nem ismert tagokat, például a gyenge kölcsönhatás és a magállapotok átfedési integrálját nem vesszük bele.

$$f(Z, E_0) = \int_0^{E_0/m_e c^2} F(Z, E) \frac{\sqrt{E(2m_e c^2 + E)}}{m_e c^2} \frac{m_e c^2 + E}{m_e c^2} \frac{(E_0 - E)^2}{m_e^2 c^4} \frac{dE}{m_e c^2}$$

Ezzel a megengedett átmenetekre, a kiintegrált $w(E)dE$ az alábbi alakot ölti:

$$\lambda = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} g^2 M^2 f(Z, E_0) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Ebből átalakítással nyerjük az összehasonlító élettartam formuláját, ami a felezési idő, és a Fermi-integrál szorzata, és idő dimenziójú mennyiség:

$$f(Z, E_0) T_{1/2} = \frac{2\pi^3 \ln 2 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{1}{g^2 M^2}$$

A felezési idő mérhető mennyiség, a Fermi-integrál számolható. Az értékek több nagyságrendet fednek le, ezért érdemes a tízes alapú logaritmusát venni.

Később látni fogjuk, hogy a relativisztikus leírásban a gM szorzat két tagból áll össze, a gyenge kölcsönhatás Hamilton-operátorának szerkezete miatt, és ezekkel felírva a log fT értéket:

$$\log f(Z,E_0)T_{1/2} = \log \frac{2\pi^3 \ln 2\hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{1}{g_V^2 M_F^2(Z,E_0) + g_A^2 M_{GT}^2(Z,E_0)}$$

Az M átfedési integrálok minél kisebb értéket adnak, azért mert a kezdeti és a végállapot hullámfüggvényei nem hasonlítnak, és így az átmenet tiltottá válik, annál nagyobb lesz a logfT értéke.

Szupermegengedett átmenetekre az összehasonlító élettartam értéke 3-4, más bomlásoknál ennél nagyobb. Az összehasonlító élettartam a tiltottság fokával együtt nő.

5. Kiválasztási szabályok, megmaradási tételek

A $\beta-$bomlás során vannak általánosan megmaradó mennyiségek. Ilyenek például az energia, lendület, perdület, töltés, barionszám, családspecifikus leptonszám. Több kísérlet is bizonyítja, hogy a paritás nem marad meg a gyenge kölcsönhatás esetén, de ettől függetlenül hasznos ismeret a reakció lefolyására nézve, ha kiszámoljuk, hogy egy adott bomlásban megmarad-e a paritás vagy sem.

A töltés, barionszám és a leptonszám megmaradás, ahogy az első fejezetben is láttuk, megmondja, milyen részecskék keletkeznek a reakcióban. A barionszám változása a $\beta-$bomláskor 0, hiszen egy kvark átalakul egy másikká, így a kvarkok száma nem változik, ennek következménye, hogy a barionszám is megmarad.

Az atommagokon belüli $\beta-$bomlásokra szorítkozva a barionszám megmaradása, a tömegszám megmaradását jelenti. A töltésmegmaradása pedig azt jelenti, hogy a rendszám eggyel nő vagy csökken annak megfelelően, hogy a kvarkszinten $u \to d$ vagy $d \to u$ folyamat ment végbe.

Az energia és a lendületmegmaradás a keletkezett részecskék energiáit és impulzusainak lehetséges irányát határozzák meg.

A perdület és a paritás megmaradása járul hozzá ahhoz az ismerethez, hogy a kezdeti és a végállapot atommagjainak spinjei és paritásai alapján meghatározzuk, hogy milyen nagyságrendű az adott $\beta-$bomlás valószínűsége. Ezt a valószínűséget fogjuk a kiválasztási szabállyal leírni. Vannak megengedett és szupermegengedett $\beta-$bomlások, amiket a kiválasztási szabályok választanak ki a spinek és a paritások alapján. De amikor ezek a kiválasztási szabályok nem állnak fenn, akkor sem biztos, hogy teljesen tiltott az átmenet. Ez nem jelenti azt, hogy a perdület valóban nem maradhat meg. Azt jelenti, hogy az átmenet sokkal kisebb valószínűségű lesz. Így számon tartunk első-rendben tiltott, másod-rendben tiltott stb. tiltottsági fokú átmeneteket, amik egyre rohamosan kisebb átmeneti valószínűséggel rendelkeznek.

Egy általános β^--bomlás reakcióegyenletét felírva:

$$A \to L + e^- + \widetilde{\nu}_e$$

A $\beta-$bomlás további típusaiban a megmaradási tételek teljesen analóg módon számolhatók, ezért most csak erre, a negatív $\beta-$bomlás esetére szorítkozunk.

Az A jelenti az anyamagot, L jelenti a leánymagot. Az anyamagnak, ha ki akarjuk írni a rendszámát s tömegszámát, akkor a következő részletesebb jelölést használunk: ${}^{A_1}_{Z_1}A$. Ugyanez a leánymagra: ${}^{A_2}_{Z_2}L$. Ezekkel a megmaradási törvények negatív $\beta-$bomlásban:

	${}^{A_1}_{Z_1}A$	$\rightarrow$	${}^{A_2}_{Z_2}L$	$+$	e^-	$+$	$\widetilde{\nu}_e$		
barionszám	A_1	$=$	A_2	$+$	0	$+$	0		
töltés	Z_1	$=$	Z_2	$-$	1	$+$	0		
leptonszám	0	$=$	0	$+$	1	$-$	1		
energia	m_1c^2	$=$	m_2c^2	$+$	m_ec^2	$+$	$m_\nu c^2$	$+$	Q
lendület	0	$=$	$\underline{P}_L$	$+$	$\underline{P}_e$	$+$	$\underline{P}_\nu$		
perdület	$\hat{\underline{I}}_A$	$=$	$\hat{\underline{I}}_L$	$+$	$\hat{\underline{S}}_e$	$+$	$\hat{\underline{S}}_\nu$	$+$	$\hat{\underline{L}}_{e\nu}$
paritás	π_A	$=$	π_L	$\cdot$	π_e	$\cdot$	π_ν	$\cdot$	π_ℓ

Itt m-mel a részecskék nyugalmi tömegét jelöltük, Q neve a reakció-energia. Ennyi mozgási energia szabaul fel a bomlásban. Az első négy megmaradási törvényt már kifejtettük. A kiválasztási szabályok az utolsó két törvény alapján adódnak.

5.1. A perdület és paritásmegmaradáson alapuló kiválasztási szabályok

Az $\hat{\underline{X}}_i$ szimbólumok kvantummechanikai perdület típusú vektor operátorokat jelölnek. $X = I$ az atommag spinje, ami az adott atommagban lévő nukleonok pálya és spin perdületeiből áll össze, $X = S$ a leptonok sajátperdülete egyenként, $X_i = L_{e\nu}$ a két lepton összes pályaperdülete (relatív mozgásuk pályaperdülete). $i = A, L, e, \nu$ az anya és a leányatommagra valamint az elektronra és az antineutrínóra utaló index. Az $\hat{\underline{X}}_i$ vektoroperátorok négyzetének és harmadik komponensének minden sajátértékét jellemzi egy egész vagy félegész szám, amit a perdület kvantumszámnak, vagy a perdület típusának hívnak. A perdületvektorok összeadásakor ezen kvantumszámokra (x_i) levezethető összefüggést fogjuk felhasználni a perdületmegmaradás felírásához.. (A levezetést mellőzzük! Viszonylag hosszabb csoportelméleti bizonyításról van szó.) Ha fennáll, hogy

$$\hat{\underline{X}}_1 + \hat{\underline{X}}_2 = \hat{\underline{X}}_3 \quad \text{vagy} \quad \hat{\underline{X}}_1 = \hat{\underline{X}}_2 + \hat{\underline{X}}_3 \quad \text{akkor fennáll, hogy} \quad |x_1 - x_2| \leq x_3 \leq x_1 + x_2 \tag{1}$$

A perdületmegmaradás felírásához először a két lepton spinjeinek összegét nevezzük el $\hat{\underline{S}}_L$-nek. Az elektron és a neutrínó is elemi részecske, ezért spinjük kvantumszáma 1/2. Két egykettedes spin összege az (1)-es egyenlet alapján $|1/2 - 1/2| = 0$ és $1/2 + 1/2 = 1$ közötti egész lépésekben lévő számok, azaz 0 vagy 1 kvantumszámú lehet. Úgy is mondhatjuk, hogy az elektron és a neutrínó szinglett spinnel vagy triplett spinnel repülhet ki. Ezt a két lehetséges értéket válasszuk szét. A szinglett eset a Fermi-típusú béta-bomlás, a triplett a Gamow–Teller-típusú. Ezekre külön kiválasztási szabályok érvényesek.

A két lepton teljes perdülete legyen $\hat{\underline{J}}_L = \hat{\underline{S}}_L + \hat{\underline{L}}_{e\nu}$, és a kvantumszámok j_l és s_L. A két lepton relatív pályaperdületének kvantumszáma pedig ℓ. A megengedett átmeneteket úgy definiáljuk, hogy $\ell = 0$ megvalósulhat a bomlásban. Emögött az a fizikai gondolat húzódik, hogy ha egy átlagos $\beta-$bomlásban kirepülő elektron pályaperdületének z-komponensének maximumát a klasszikus $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ formula alapján felülbecsüljük, akkor $\ell\hbar \cong |\underline{r} \times \underline{p}| = b \cdot p \leq R \cdot (p_e + p_\nu)$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahol b-t ütközési paraméternek hívjuk és R az atommag sugara. $p_e + p_\nu \cong E_e/c + E_\nu/c \cong Q/c$, ezért $\ell \leq \frac{Q \cdot R}{\hbar c} \cong \frac{5\text{MeV}10\text{fm}}{197\text{MeV fm}} \cong \frac{1}{4}$. Azaz amikor az elektron egy nagy energiájú $\beta-$bomlásban néhány MeV-vel repül ki a lehető legnagyobb atommag sugaránál nagyobb ütközési paraméterrel, akkor is 1-nél kisebb számot kapunk a perdületre $\hbar$ egységekben.

A $\beta-$bomlásban a tiltottság fokának (t) definíciója: az a legkisebb $t = \ell_{min}$, ami a bomlásban meg tud valósulni. A 0-ad rendben tiltott átmenetek, az előbb definiált megengedett átmenetek.

A paritás megmaradásának felírása egyszerűbb feladat. Első szabály, hogy a végállapotban levő három részecske hullámfüggvényeinek az a 4 része, ami a leányelem (Φ_L), az elektronspin, a neutrínóspin és a relatív mozgás hullámfüggvényeihez tartozik szorzat alakban írható. Ezért a paritásaik összeszorzódnak.

Az elektron hullámfüggvényének radiális részében benne van az atommag Coulomb-vonzása miatti Fermi-függvénnyel leírt rész. Az elektron és az antineutrínó relatív mozgásának szögtől függő részét centrális Coulomb-potenciálban, illetve más kölcsönhatás nélkül a gömbfüggvények ($Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$) írják le. Az ℓ kvantumszám éppen a pályaperdület típusa, és a gömbfüggvények paritását ismerjük: $(-1)^\ell$. Az elemi részecskék paritása $+1$ (megj.: az antineutrínó belső paritása nem -1?). Ezért a paritásmegmaradás egyenlete:

$$\pi_A = \pi_L \cdot (+1) \cdot (+1) \cdot (-1)^\ell \qquad \text{avagy} \qquad \frac{\pi_A}{\pi_L} = (-1)^\ell$$

5.1.1. Fermi-típusú bomlások kiválasztási szabályai

Ilyenkor $\underline{\hat{S}}_L = \underline{\hat{0}}$, minden kvantumszáma 0. A perdületmegmaradáskor marad az alábbi három tag:

$$\underline{\hat{I}}_A = \underline{\hat{I}}_L + \underline{\hat{L}}_{e\nu}$$

Alkalmazva az (1)-es egyenletet a perdület megmaradása ebben az esetben:

$$\Delta i = |i_A - i_B| \leq \ell \leq i_A + i_B$$

Akkor kapunk megengedett átmenetet, ha $\ell_{min} = 0$, azaz:

$$i_A = i_B \qquad \text{avagy} \qquad \Delta i = 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\pi_A}{\pi_L} = 1.$$

5.1.2. Gamow–Teller-típusú bomlások kiválasztási szabályai

Ilyenkor az s_L kvantumszám értéke 1. $\underline{\hat{J}}_L = \underline{\hat{S}}_L + \underline{\hat{L}}_{e\nu}$, ezért $|j_l - s_L| \leq \ell \leq j_l + s_l$ miatt $|j_l - 1| \leq \ell \leq j_l + 1$

A megengedett átmeneteknél $\ell_{min} = 0$, ezért azt vizsgáljuk, mikor lehet $\ell_{min} = 0$. Ha ℓ minimuma 0, akkor $j_L - 1 = 0$, avagy $j_L = 1$. A kérdés ennél az átmenetnél az, hogy mikor lehet$j_L = 1$.

A perdület megmaradása miatt:

$$\underline{\hat{I}}_A = \underline{\hat{I}}_L + \underline{\hat{J}}_L \qquad \text{ezért} \qquad |i_A - i_L| \leq j_L \leq i_A + i_B$$

Ezért j_L akkor lehet 1, ha $\Delta i = |i_A - i_L| = 0$ vagy 1 értéket vesz fel, valamint $i_A + i_B$ nem kisebb 1-nél, azaz $i_A + i_B$ nem 0. Ez utóbbi csak akkor lehet, ha $i_A = i_B = 0$.

Ezért a Gamow–Teller-típusú kiválasztási szabály:

$$\Delta i = 0, 1 \qquad \text{az} \quad i_A = i_B = 0 \quad \text{kivételével, és} \qquad \frac{\pi_A}{\pi_L} = 1.$$

Szerző Horváth Ákos (ELTE Atomfizikai Tanszék), 2019. október, lektorálta Csótó Attila (ELTE Atomfizikai Tanszék), Ez a 2019. október 27.-i verzió