# Atommagok mágneses momentuma

## 1. A nukleonok mágneses momentuma

A mágneses momentum a perdületből eredeztethető. A részecskék sajátperdülete és a pályeperdülete is kelt mágneses teret, amiket mágneses dipólmomentummal, vagy röviden mágneses momentummal írunk le. Az atommagok, a neutron és a proton mágneses momentumait arra az esetre definiáljuk, amikor nem mozognak. De természetesen egyik sem elemi részecske, ezért az alkotórészeik mozohatnak belül, és azok keltik a mágneses teret. A neutron és a proton mágneses momentumát a bennük helyet foglaló kvarkok keltik. Amikor a neutron és a proton mágneses momentumait már ismerjük, akkor ezekből építjük fel az atommagok mágneses momentumait.

### 1.1. A pályaperdületből fakadó mágneses momentum

A pályeperdületből fakadó mágneses momentum klasszikus értelmezése: Egy körpályán keringő ponttöltés által keltett mágneses teret leíró dipólmomentum ($M$) a klasszikus elektrodinamika szerint:

$$M = IA = \frac{qv}{2r\pi} r^2 \pi = \frac{q\hbar}{2m} \frac{mvr}{\hbar} = \mu_N \frac{L}{\hbar}$$

Itt az $I$ áramerősséget átlagosan értjük. A ponttöltés $q$ töltése a $T$ periódus idő alatt egyszer áthalad a körpálya egy pontján, ezért $I = q/T = qv/$kerület. Az általános $q$ töltés itt most az elemi töltést jelenti, mert a protonnak, elektronnak ekkora a töltésének abszolut értéke.

A $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m}$ mennyiséget az ún. mag-megnetonnak hívjuk. Ez a Bohr-magneton analógja, de az elektron tömegének helyére a proton tömegét írjuk, $mc^2 = 938$ MeV. [wiki] Az értéke $\mu_N = 31{,}52$ neV/T. A részecske tömege a nevezőben szerepel, ezért a mag-magneton kb 2000-szer kisebb a Bohr-megnetonnál. Ezért az atommagok mágneses terei sokkal kisebbek az elektron által keltett mágneses tereknél. Az atommagok például csak hiperfinom módon hasítják fel az atomi elektronszinteket, míg az elektronok mágneses tulajdonságai a finomfelhasadásért felelősek.

A klasszikus $L = mvr$ pályaperdületet ha a kvantumos sajátértékekre általánosítjuk, akkor is fennáll a fenti egyenlőség. Igaz az, hogy egy elemi töltésű részecske $1\hbar$ pályaperdülettel éppen egy mag-magnetonnyi mágneses momentumot hoz létre, és ha nagyobb a pályperdület sajátértéke, akkor azzal arányosan nagyobbat. Az $L/\hbar$ a pályaperdület z-komponensének dimenziótlan értéke ($\ell$).

### 1.2. A spinből fakadó mágneses momentum

Analóg módon az egyes részecskéknek a spinjükből is fakad mágneses momentumuk nemcsak a mozgásukból (pályaperdület), de adott sajátperdület kétszer akkora mágneses momentumot hoz létre, ahogy azt az atomfizikából (Einstein–de Haas-kísérlet) és a Dirac-egyenlet megoldásából tudjuk. Ezt a leírásban úgy vesszük figyelembe, hogy alkalmazunk egy $g$ konstanst, melynek neve *giromágneses faktor*:

$$M = g\mu_N \frac{S}{\hbar}$$

Az elektron giromágneses faktora a Dirac-egyenlet szerint 2. $\mu_e = 2\mu_B \frac{1}{2}$, de tudjuk, hogy a sokadik tizedesjegyben a mért érték ettől eltér a vákum kvatumos alaptulajdonságai miatt. Ezt a kvantumtérelméletek írják le helyesen. A proton giromágneses faktorát is 2-nek várjuk, mert jól leírható a Dirac-egyenlettel (feles spinű fermion).

A proton mágneses momentuma azonban sokkal jobban eltér ettől a várt értéktől. 2 helyett 5 körüli szám. Ennek oka az, hogy a proton nem elemi részecske. Anomális mágneses momentumát a benne található kvarokok és más erősen kölcsönható anyagok építik fel. A proton és a neutron mágneses momentumának kiszámolását a kvantumszíndinamikai leírástól várhatjuk, de az nagyon nem könnyű.

A később bemutatandó mérések alapján a nukleonok mágneses momentumai, s giromágneses faktoraik:

$$\begin{array}{ll} \mu_p = 2,793\mu_N & g_p = 5,586 \\ \mu_n = -1,913\mu_N & g_n = -3,826 \end{array}$$

### 1.3. A proton mágneses momentumának mérése

### 1.4. A neutron mágneses momentumának mérése

## 2. Az atommagok spinje és mágneses momentuma

Egy atommagon belüli protonok és neutronok perdületei építik fel az atommag teljes perdületét, amit $I$-vel jelölünk. Az egyes perdületeket a kvantummechanikai perdületvektorok összeadási szabályai alapján kell összeadni, ami bonyolult matematikát igényel, és most mellőzni fogjuk, vagy egyszerűsítve tárgyaljuk.

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{S}_{p,i} + \sum_{i=1}^{Z} \vec{L}_{p,i} + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{n,j} + \sum_{j=1}^{N} \vec{L}_{n,j}$$

Az atommag mágneses momentumát is az egyes nukleonok által keltett mágneses momentumok összeadása által nyerjük, mint ahogyan az egyes mágneses terek is összeadódnak vektormennyiségként. A pályaperdület mindig 1-es giromágneses faktorú mágneses momentumot kelt, hiszen ehhez viszonyítjuk a többit. Ezért a protonok pályaperdületéből adódó mágneses momentumnál $g = 1$ szerepel. A neutronok mozgása nem hoz létre mágneses teret, ezért a pályaperdületük sem hoz létre mágneses momentumot. Emiatt itt csak három tag szerepel. A protonok és a neutronok saját mágneses momentumai által keltett mágneses momentumok jelentik az első és a harmadik tagot a következő egyenletben az 1. fejezetben bevezetett gondolatok alapján.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{Z} g_p \mu_N \frac{\vec{S}_{p,i}}{\hbar} + \sum_{i=1}^{Z} \mu_N \frac{\vec{L}_{p,i}}{\hbar} + \sum_{j=1}^{N} g_n \mu_N \frac{\vec{S}_{n,j}}{\hbar}$$

Ez a két vektor klasszikusan elképzelve nem párhuzamos! Viszont $\vec{I}$ megmaradó mennyiség, a perdület-megmaradás általános elve miatt. Az atommagban emiatt a mágneses momentum vektora a perdület körül precesszál. A mozgás során a perdületre merőleges komponens kiátlagolódik. Időátlagban a precesszáló $\vec{M}$-nek a megmaradó $\vec{I}$-re vett vetülete lesz az átlag. Az $\vec{I}$-re merőleges komponensek átlaga 0. Ezért a mágneses momentum kiszámolásakor hasznos definiálni az effektiív (vagy spektroszkópiai) mágneses momentum vektort:

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{I}\vec{M}}{I^2}\vec{I}$$

Kvatumosan ezt azt jelenti, hogy a perdület $\hat{I}$ operátorai $(\hat{I}^2, \hat{I}_z)$ felcserélhetők a $\hat{H}$ Hamilton-operátorral, és ezért sajátvektoraik közösek. Egy adott energiájú hullámfüggvénynek vannak perdület kvantumszámai, ami az $\hat{I}$ operátorok sajátértékeit jelentik. De a fenti felépítés miatt az $\hat{M}$ mágneses momentum operátor már nem felcserélhető az energiaoperátorral. Ez a klasszikusan nem párhuzamos vektorok kvantumos analógiája. Egy adott állapot hullámfüggvénye nem sajátfüggvénye az $\hat{M}$-nek. Ezért a mágneses momentum értékét nem sajátértékként, hanem kvantummechanikai átlagként definiáljuk.

$$\mu_i = \langle \Psi | \hat{M}_i | \Psi \rangle$$

Egy atommag adott gerjesztési energiájú vagy alapállapota perdület sajátállapot, de ennek ellenére több hullámfüggvény ír le egy adott energiát. Az $\hat{I}_z$ minden sajátfüggvénye ugyanis ugyanolyan energiájú. (Ez az atommag teljes perdületének harmadik komponense, és kívülről nincs mágneses tér alapértelmezésben. Az atommagon belül van mágneses tér és meghatározza a spin-pálya kölcsönhatást.) Ezért megegyezés alapján, definíció szerint a legnagyobb perdület harmadik komponensű hullámfüggvényt választották arra, hogy az átlagolást elvégezzük. Ha $\hat{I}_z$ sajátértékeit $m$-mel jelöljük (mágneses kvantumszám), akkor $m = i\hbar$ esetre kell átlagolni.

$$\mu_i = \langle \Psi_{m=i} | \hat{M}_i | \Psi_{m=i} \rangle$$

Egy atommag vagy nukleon mágneses momentumát egy adott mágneses térben létrejövő energia eltolódása alapján mérhetjük meg. A tér nélküli esethez képest $\Delta E = -\vec{\mu}\vec{B}$. Általában a mágneses tér irányát vesszük $z$-iránynak, és ekkor $\Delta E = -\mu_z B$. Ebben az esetben a mágneses momentum egy operátorrá $\hat{\mu}_z$-vé egyszerűsödik, a másik két vektor-komponens 0. Ezzel könnyebb a fenti átlagolást elvégezni.

$$\mu = \langle \Psi_{m=i} | \hat{\mu} | \Psi_{m=i} \rangle = \langle \Psi_{m=i} | \hat{\mu}_z | \Psi_{m=i} \rangle = \langle \Psi_{m=i} | \frac{\vec{I}\vec{M}}{I^2} \hat{I}_z | \Psi_{m=i} \rangle = \frac{i\hbar}{i(i+1(\hbar^2} \langle \Psi_{m=i} | \vec{I}\vec{M} | \Psi_{m=i} \rangle$$

Ezt spektroszkópiai mágneses momentumnak is hívják.

# 3. Schmidt-féle utolsó nukleon modell

Az atommagok mágneses momentumát közelítőleg jól megjósoló módszer a Schmidt-féle utolsó nukleon modell. Ezt a $^7$Li példáján mutatjuk be. A $^7$Li atommagjában van 3 proton és 4 neutron. A héjmodell keretei között ezek az $1s_{1/2}$ és az $1p_{3/2}$ pályákon mozognak. A 4 neutron párokba rendeződik, és a 3 protonból 2 egy párt alkot. Egy proton van az $1p_{3/2}$ pályán amelyik egyedül van. Schmidt-modellje szerint ez az utolsó nukleon alakítja ki az egész $^7$Li mágneses momentumát. Ilyenkor ennek a protonnak a perdületével kell számolnunk. $\ell = 1$, $i = \ell + 1$.

$$I = S_p + L_p \qquad M = g_p \mu_N \frac{S_p}{\hbar} + \mu_N \frac{L_p}{\hbar}$$

$$IM\hbar = (S_p + L_p)(g_p \mu_N S_p + \mu_N L_p) = \mu_N \left( g_p S_p^2 + L_p^2 + (1 + g_p) S_p L_p \right)$$

Az $S_p L_p$ skalárszorzatot át kell alakítani az $I = S_p + L_p$ alapján. Emiatt $I^2 = S_p^2 + L_p^2 + 2S_p L_p$, ezért

$$IM = \frac{\mu_N}{\hbar} \left( g_p S_p^2 + L_p^2 + (1 + g_p) \frac{I^2 - S_p^2 - L_p^2}{2} \right)$$

Ezt már tudjuk átlagolni

$$\langle \Psi_{m=i} | \vec{I}\vec{M} | \Psi_{m=i} \rangle = \frac{\mu_N}{\hbar} \left( g_p \frac{1}{2} \frac{3}{2} \hbar^2 + \ell(\ell+1)\hbar^2 + (1 + g_p) \frac{i(i+1)\hbar^2 - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\hbar^2 - \ell(\ell+1)\hbar^2}{2} \right)$$

$$\mu = \frac{i\hbar}{i(i+1)\hbar^2} \langle \Psi_{m=i} | \vec{I}\vec{M} | \Psi_{m=i} \rangle = \frac{i\mu_N \hbar^2}{2i(i+1)\hbar^2} \left( \frac{3}{2} g_p + 2\ell(\ell+1) + (1 + g_p) \left( i(i+1) - \frac{3}{4} - \ell(\ell+1) \right) \right)$$