Két 1/2-es spinből álló rendszer teljes spinje (spinek összeadása)

Két darab 1/2 spinű részecskéből álló rendszert írunk le. Ezek lehetnek elektronok, vagy protonok, vagy akármilyen elemi vagy nem elemi részecskék. A spin a saját perdületüket jelenti. A spin eredete és elméleti bevezetése a kvantummechanika órák anyaga.

Egy 1/2-es spinű részecske olyan kvantumrendszer, melynek hullámfüggvényének a térbeli viselkedését leíró részén túl van még két állapota. Jelen esetben a térfüggést nem vizsgáljuk és gyakran nem is lényeges. Ilyenkor a feles spin olyan rendszer melynek két állapota van. Ezeket a következőképpen jelöljük:

$$\text{egyik állapot} = |\uparrow\rangle \text{ vagy } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{másik állapot} = |\downarrow\rangle \text{ vagy } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezen állapotok valamilyen külső kölcsönhatás nélkül azonos energiájúak, de külső térben (pl. a perdülethe mindig kapcsolódó mágneses momentum miatt mágneses térben) ez a degeneráció felbomlik. Továbbá a két állapot azonos perdület nagysággal rendelkezik. A spinek kvantummechanikai vektoroperátorok, ezért kezelésük elég bonyolult, de ebben a szövegben ezt a lehető legegyszerűbben kezeljük. A vektoroperátor nagyságát az abszolutérték négyzet operátor sajátértékét jelenti.

1. Egy egykettedes spin vektoroperátorának matematikai leírása

röviden:

Egy spin állapotai az $\vec{S}^2$ és az S_z operátorok sajátfüggvényei lehetnek, melyeket a fent leírt módon jelölünk. Ezért a spin leírásához ezen két operátor sajátértékeit elég megadni a legtöbb esetben. Ez kihagyja a hullámfüggvények leírását, de sokszor elegendő. Az 1/2-es spin típusa, vagy kvantumszáma = 1/2. Ez a szám minden további sajátértéket meghatároz, ahogy a kvantummechanika órán tanultuk:

$$\vec{S}^2 |\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\uparrow\rangle \qquad \vec{S}^2 |\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\downarrow\rangle$$
$$S_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar |\uparrow\rangle \qquad S_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar |\downarrow\rangle$$

részletesen:

Számolásaink alapja az, hogy egy 1/2-es spin vektoroperátorát a Pauli-mátrixokkal írjuk le.

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ezen ismeretek alapján ki lehet számolni, hogyan hatnak az egykettedes spin egyes komponensei a két állapotra.

$$S_x|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle \qquad S_x|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

$$S_y|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle \qquad S_y|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

$$S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \qquad S_z|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

Ebből az látszik, hogy a két állapot az S_z operátor sajátállapota $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$ sajátértékkel, de az S_x és S_y operátorok egyiket a másik számszorosába viszik át (billentik a spint).

A spin vektoroperátor négyzete a Pauli-mátrixok négyzeteinek összegével lesz arányos. A Pauli-mátrixok négyzete, viszont, mindig az egységoperátor, ezért az

$$\vec{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3}{4}\hbar^2\mathbf{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\hbar^2\mathbf{1}.$$

Általában az $\vec{S}^2$ sajátértéke $s(s+1)\hbar^2$, az $s = 1/2$ eseten kívül is. Mostantól $\vec{S}$ a kétrészecskés spin operátorát fogja jelenteni.

2. Két egykettedes spinből álló rendszer

Az állapotok jelölése

A két egyrészecske spin állapotait, azaz a két egykettedes spinű részecske állapotait külön-külön jelöljük $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2$-vel. Az alsó index jelöli a részecske sorszámát. Az egyes részecskék térbeli viselkedését ismét elhagyjuk.

A kétrészecske állapotot egy *ket* típusú jeöléssel is leírhatjuk: $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$. Ilyenkor egy jelölésbe helyezzük mindkét spint, az első helyen beírt jel jelöli az első részecskét, a második helyen leírt a második részecskét. s_{1z} lehet $\uparrow$ vagy $\downarrow$, és a második spin z-komponense is ugyanígy.

Logikailag a két egykettedes spin egyenként két irányban állhat, így összesen négy állapotot lehet előállítani. Ezek kétspines hullámfüggvények. Egyszerűen ezek: $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$.

A kétrészecskés állapotok előállításának elve

Ilyenkor a teljes rendszer spinje, azaz sajátperdülete (másfajta perdület nincs is most, hiszen nincs térfüggés):

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2.$$

Ez a perdület megmaradó mennyiség. Ezért ennek abszolutérték négyzete és z-komponense felcserélhető a Hamilton-operátorral, ezért sajátfüggvényei a Hamilton-operátor sajátfüggvényei is, legalabbis annak spintől függő részét megadják. Ezért meg kell keressük a teljes spin négyzetének $\vec{S}^2$ és a harmadik kompnensének, az $S_z = S_{1z} + S_{2z}$-nek a sajátfüggvényeit.

A kétrészecske-sajátállapotok keresése

Az $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ állapotok sajátállapotai a teljes spinnek is (négyzet és z-komponens). A $|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$ viszont nem. De egy kvantumrendszerben az állapotok lineáris kombinációi is lehetésges állapotok, ezért a kétrészecskés sajátállapotokat ezen egyrészecskés sajátállapotokból egyszerűen képzett kétrészecskés állapotok lináris kombinációjaként fogjuk előállítani.

Annak belátásához, hogy a Az $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ állapotok sajátállapotai a spin négyzet és a z-komponens operátoroknak, meg kell nézni hogyan hat S^2 és S_z ezekre az állapotokra.

Az első spinre ható operátorok nem hatnak a másodikra, és a második helyen álló részecske spinjének operátorai pedig csak a második spinre hatnak, az elsőre nem.

A teljes spin z-komponense $(S_{1z} + S_{2z})$

Az S_z a két egyrészecskés operátor összege, $S_z = S_{1z} + S_{2z}$. A tagok csak egy részecske spinállapotára hatnak, de arra pedig úgy hogy egy számmal megszorozzák (jelen esetben $\pm 1/2$-del). A másik részét a kétspines hullámfüggvénynek nem bántja. Ezért az S_z-nek a fenti 4 állapot (kétspines hullámfüggvény) mind sajátállapota.

$$(S_{1z} + S_{2z})|\uparrow\uparrow\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\hbar|\uparrow\uparrow\rangle = 1 \cdot \hbar|\uparrow\uparrow\rangle \qquad (S_{1z} + S_{2z})|\uparrow\downarrow\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\hbar|\uparrow\downarrow\rangle = 0 \cdot \hbar|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$(S_{1z} + S_{2z})|\downarrow\uparrow\rangle = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\hbar|\downarrow\uparrow\rangle = 0 \cdot \hbar|\downarrow\uparrow\rangle \qquad (S_{1z} + S_{2z})|\downarrow\downarrow\rangle = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\hbar|\uparrow\downarrow\rangle = -1 \cdot \hbar|\downarrow\downarrow\rangle$$

A teljes spin négyzete $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$

Kicsit bonyolultabb a helyzet az abszolutérték négyzet operátor esetén.

$$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + 2\vec{S}_1\vec{S}_2 + S_2^2 = S_1^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}) + S_2^2.$$

Itt a két egyrészecske abszulérték négyzet operátor ismét csak az egyik részecske-részre hat és arra pedig sajátállapotot talál. S_1^2 és S_2^2 is $\frac{3}{4}\hbar^2$-szer az egységoperátor azon a részen, ahol hat (arra a részecskére, amir hat). Ezt az előzőekben már láttuk. A vegyesszorzat azonban egyrészt mindkét részre hat, másrészt az x és y komponensek billentik az egyrészecske spineket. Az S_{nx} a kötelező ($\hbar/2$ szorzás mellett) szimplán billent, az S_{ny} lefelé i-vel szorozva, felfelé $-i$-vel szorozva billent. ($n = 1, 2$ a részecske sorszámát jelenti.) Ezért ezt végigszámoljuk az egyes tagok hatásait.

$$\begin{aligned} S_1^2 =& \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{1y}^2 + \sigma_{1z}^2\right) = \frac{\hbar^2}{4} 3 \cdot \mathbb{1} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \\ S_2^2 =& \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2 \end{aligned}$$

Az S_{nx} operátorok külön-külön billentik a spineket:

$$S_{1x}S_{2x}|\uparrow\uparrow\rangle = S_{1x}\frac{\hbar}{2}|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|\downarrow\downarrow\rangle \qquad S_{1x}S_{2x}|\uparrow\downarrow\rangle = S_{1x}\frac{\hbar}{2}|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|\downarrow\uparrow\rangle$$

$$S_{1x}S_{2x}|\downarrow\uparrow\rangle = S_{1x}\frac{\hbar}{2}|\downarrow\downarrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|\uparrow\downarrow\rangle \qquad S_{1x}S_{2x}|\downarrow\downarrow\rangle = S_{1x}\frac{\hbar}{2}|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|\uparrow\uparrow\rangle$$

Az S_{ny} operátorok külön-külön billentik a spineket és még bejönnek az i-s szorzók:

$$S_{1y}S_{2y}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = iS_{1y}\frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = i^2\frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle \qquad S_{1y}S_{2y}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = -iS_{1y}\frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = i(-i)\frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$$

$$S_{1y}S_{2y}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = iS_{1y}\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = (-i)i\frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle \qquad S_{1y}S_{2y}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = -iS_{1y}\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = (-i)(-i)\frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle$$

Az S_{nz} sajátállapotokat fog találni:

$$S_{1z}S_{2z}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = S_{1z}\frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle \qquad S_{1z}S_{2z}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = -1S_{1z}\frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = 1(-1)\frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$$

$$S_{1z}S_{2z}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = S_{1z}\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle \qquad S_{1z}S_{2z}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = -S_{1z}\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = (-1)(-1)\frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$$

Ezekkel ki tudjuk számolni az $\vec{S}^2$ hatását az egyrészecske sajátállapotokból összeállított állapotokra.

$$\begin{aligned}
S^2 =& S_1^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}) + S_2^2 \\
S^2\left|\uparrow\uparrow\right\rangle =& \frac{\hbar^2}{4}\left(3\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + 2\left(\left|\downarrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\uparrow\right\rangle\right) + 3\left|\uparrow\uparrow\right\rangle\right) = 2\hbar^2\left|\uparrow\uparrow\right\rangle \\
S^2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle =& \frac{\hbar^2}{4}\left(3\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + 2\left(\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\right\rangle\right) + 3\left|\uparrow\downarrow\right\rangle\right) = \hbar^2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \hbar^2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle \\
S^2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle =& \frac{\hbar^2}{4}\left(3\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + 2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) + 3\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = \hbar^2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \hbar^2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle \\
S^2\left|\downarrow\downarrow\right\rangle =& \frac{\hbar^2}{4}\left(3\left|\downarrow\downarrow\right\rangle + 2\left(\left|\uparrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right) + 3\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right) = 2\hbar^2\left|\downarrow\downarrow\right\rangle
\end{aligned}$$

Ezek szerint $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$ és $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$ nem sajátállapotai a kétspin-négyzet operátornak.

Keverék állapotok

Ha viszont összeadjuk a két állapotot, ahol az egyrészecske spinek ellentétesen állnak:

$$S^2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = 2\hbar^2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$$

már sajátállapot lesz. Továbbá ha kivonjuk őket egymásból, akkor is, hiszen ekkor a nulla állapotot kapjuk, ami bármelyik állapot 0-szorosa:

$$S^2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = \left|0\right\rangle = 0\hbar^2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$$

Ezzel találtunk három olyan állapotot, melyek a kétrészecske spin négyzetének sajátállapotai és $2\hbar^2$ sajátértékkel rendelkeznek: $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle, \left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle, \left|\downarrow\downarrow\right\rangle$

Az S_z operátor hatását is ki lehet a keverék állapotokon számolni. Mint láttuk $S_{1z} + S_{2z}$ egyenként $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$-t és $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$-t is a nullába viszi, ezért összegüket és különbségüket is.

$$\begin{aligned}
S_z\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = (S_{1z} + S_{2z})\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \frac{\hbar}{2}(1-1)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \left|0\right\rangle = 0\hbar\left|\uparrow\downarrow\right\rangle \\
S_z\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = (S_{1z} + S_{2z})\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \frac{\hbar}{2}(-1+1)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \left|0\right\rangle = 0\hbar\left|\downarrow\uparrow\right\rangle
\end{aligned}$$

Ezért az összeg és a különbség állapotokra:

$$\begin{aligned}
(S_{1z} + S_{2z})\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = 0\hbar\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) \\
(S_{1z} + S_{2z})\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = 0\hbar\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

Keverék állapotok normálása

Ezek a keverék állapotok még nem normáltak. Ha önmagukkal skalárszorozzuk őket, akkor az eredmény 2. A számolást kezdjük az egyes z-irányban ellentétesen beálló állapotok skalárszorzatainak kiszámolásával, melyek nem túl meglepő módon a következő eredményt adják:

$$\langle\uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow\rangle = (1,0)_1(0,1)_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = (1,0)_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 (0,1)_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\langle\uparrow\downarrow \mid \downarrow\uparrow\rangle = (1,0)_1(0,1)_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = (1,0)_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 (0,1)_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \langle\downarrow\uparrow \mid \downarrow\uparrow\rangle &= (0,1)_1(1,0)_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = (0,1)_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 (1,0)_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = 1 \cdot 1 = 1 \\ \langle\downarrow\uparrow \mid \uparrow\downarrow\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Ez utóbbi a skalárszorzat kommutativitása miatt is például fennáll. Ezt a két keverék állapotot vagy $(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle)$-lel jelöljük, vagy (ami ugyanazt jelenti) $|\uparrow\downarrow \pm \downarrow\uparrow\rangle$-lel. Ezzel a keverékállapotok skalárszorzata saját magukkal:

$$\langle\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow \mid \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle = \langle\uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow\rangle + \langle\uparrow\downarrow \mid \downarrow\uparrow\rangle + \langle\downarrow\uparrow \mid \uparrow\downarrow\rangle + \langle\downarrow\uparrow \mid \downarrow\uparrow\rangle = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

$$\langle\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow \mid \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = \langle\uparrow\downarrow \mid \uparrow\downarrow\rangle - \langle\uparrow\downarrow \mid \downarrow\uparrow\rangle - \langle\downarrow\uparrow \mid \uparrow\downarrow\rangle + \langle\downarrow\uparrow \mid \downarrow\uparrow\rangle = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$$

Ezért $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ normált kétrészecskés spin-sajátállapotok. Az S^2 és S_z operátorok ezekhez tartozó sajátértékei a normálástól nem változnak. Az S^2 sajátértékei $2\hbar^2$ és $0\hbar^2$ a felírt sorrendben. Az S_z-é $0\hbar$ mindkét esetben.

Általános állapotok

Ha nemcsak a sajátállapotokat vizsgáljuk, akkor ezek lineáris kombinációi fordulhatnak elő. Ez a kvantummechanika alappillére, a Hilbert-tér konstrukciója. A két feles spin általános állapotainak leírásához a négy eddig is tárgyalt sajátállapotot használjuk fel, ezt másképpen úgy mondjuk, hogy a rendszer állapotait leíró tér négy dimenziós. Az könnyen elképzelhető vektorterekben minden dimenzióhoz egy koordinátatengely tartozik, melyhez egy tengely-irányú egységvektor. Jelen esetben ezeket a normált kétrészecskés sajátállapotok helyettesítik, amit először úgy építettünk fel hogy az egyrészecskés sajátállapotokat tettük egymás mellé. Ezt a négy dimenziós teret hívjuk a két egyrészecskés spin, külön-külön kétdimenziós tereinek direktszorzat terének. Azért direkt-szorzat tér, mert minden kétrészecskés állapotban (a szorzat-vektortér minden pontjában) mindkét összeszorzott tér állapota, mindkét egyrészecske állapot, beleszámít, ahogy ezt eddig is láttuk.

Vizsgáljuk meg azt, hogy az S^2 és az S_z operátorok hatását hogyan lehet leírni egy általános (nem saját-) állapot esetén. Az általános állapot felírása:

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\uparrow\rangle + \beta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma\,|\downarrow\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Az előzőekben tárgyaltak alapján a két perdület-operátor hatását kifejező mátrixok így írhatók:

$$\begin{aligned}
S^2\left|\Psi\right\rangle =& S^2\left(\alpha\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+\beta\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\gamma\left|\downarrow\uparrow\right\rangle+\delta\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right)= \\
=&\alpha S^2\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+\beta S^2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\gamma S^2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle+\delta S^2\left|\downarrow\downarrow\right\rangle= \\
=&\alpha 2\hbar^2\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+\beta\hbar^2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)+\gamma\hbar^2\left(\left|\downarrow\uparrow\right\rangle+\left|\uparrow\downarrow\right\rangle\right)+\delta 2\hbar^2\left|\downarrow\downarrow\right\rangle= \\
=&\hbar^2\left(2\alpha\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+(\beta+\gamma)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+(\beta+\gamma)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle+2\delta\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right)= \\
=&\hbar^2\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\hbar^2\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\left|\Psi\right\rangle \\
S_z\left|\Psi\right\rangle =&\hbar\left(\alpha S_z\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+\beta S_z\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\gamma S_z\left|\downarrow\uparrow\right\rangle+\delta S_z\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right)=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ezen bázis használatával az S_z diagonális, de az S^2 nem. Ellenben ha nem így adjuk meg az általános állapotokat, hanem az S^2 sajátállapotai szerint kifejtve, azaz a két keverék állapotot használva:

$$\left|\Psi\right\rangle=a\left|\uparrow\uparrow\right\rangle+b\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)+c\left|\downarrow\downarrow\right\rangle+d\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle-\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

akkor S^2 is diagonális lesz. Ez az új koordinátarendsze egy főtengelytranszformációval állt elő az előzőből, szemléletesen azon kétdimenziós altérben, ahol az egymással ellentétesen álló egyrészecskés spinekből álló kétrészecskés állapotok a bázisok, ott egy 90°-os forgatást hajtottunk végre.

$$S^2\left|\Psi\right\rangle=\hbar^2\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\quad\text{és}\quad S_z\left|\Psi\right\rangle=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

Az eredmány azt mutatja, hogy az első három bázisvektort érdemes összefogni egy altérbe (3 dimenziósba), és a negyediket pedig külön egy másikba (1 dimenziósba). Ekkor a négy dimenziós terünk két altér direkt összege lesz. Az első három dimenziós altér éppen egy 1-es spint ír le, a másik pedig egy 0-ás spint. Az elsőnek három állapota van, a másiknak pedig egy, ami minden irányból nézve 0 perületű, és az abszolut értéke is 0. Ezt szokásosan így jelöljük:

$$\left|1\right\rangle\oplus\left|0\right\rangle$$

Ez azt jelenti, hogy a két egykettedes spinből álló rendszer teljes állapota, amennyiben a perdület operátorok sajátállapota, akkor vagy egy 1-es vagy egy 0-ás spin egyik állapotában van:

$$\left|1/2\right\rangle\otimes\left|1/2\right\rangle=\left|1\right\rangle\oplus\left|0\right\rangle$$

Az $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right),\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$ állapotokat, és a hozzájuk tartozó három dimenziós alteret triplet állapotnak hívjuk, valamint a $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle-\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$ állapotot pedig szinglet állapotnak hívjuk. Mindkettő kétrészecskés spinállapotot jelent.