

A radioaktivitás időbeli leírása

1. Egy atommag radioaktív bomlása

1.1. Radioaktív izotópok

A *radioaktivitás* az atommagok spontán átalakulása. Ez különbözik a *radioaktív sugárzástól*, ami gyors töltött részecskék vagy semleges részecskék árama. Az atommagok bomlása után keletkező semleges részecskék lehetnek gamma-fotonok, neutrínók vagy neutronok. Nagy energiájú atommag-atommag ütközésben más semleges részecskék is keletkezhetnek. A radioaktivitás során neutronok is keletkezhetnek. Ha egy olyan izotópot állítunk elő, ami magától magából egy neutront kilök, akkor ilyenkor a kölcsönhatás (a magerő) erőssége nagy, hamar lezajlik a folyamat és a felezési idő olyan kicsi lesz, hogy csak rezonanciaként érzékelhető a neutron bomló izotóp. Ezeket nem is számítjuk a stabil atommagokhoz. Van azonban olyan eset, amikor egy béta-bomlás után a leányelem magasan gerjesztett állapotban keletkezik, és ez a nagy energiafelesleg elég nagy ahhoz, hogy egy neutron kibocsátása létrejöjjön. A neutron kilökése itt is nagyon gyors folyamat, de az előtte lezajló béta-bomlás teszi időben feldolgozhatóvá, mérhetővé a neutronokat. A neutronkibocsátás is radioaktív sugárzás.

A radioaktivitáskor felszabaduló sugárzás ionizálja a környezetét. A töltött részecskék az útjuk mentén folyamatosan átadnak energiát a környező atomok és molekulák elektronjainak. A semleges részecskék néha-néha nekimennek valaminek, és egy kölcsönhatás során adnak át energiát töltött részecskéknek, és azok fogják ionizálni a környezetet. A gamma-fotonok elektronnal ütköznek, a neutronok protonokkal, esetleg nehezebb atommagokkal. Ezért a radioaktív-sugárzások egyben *ionizáló sugárzások*. Van még olyan ionizáló sugárzás, ami forrása nem radioaktivitás. Ilyen például a protonok árama a napszélben, ami a kozmikus sugárzás egyik alkotóeleme.

A radioaktivitás szó eredete a radiális, azaz sugárirányú szóval van összefüggésben. A radiális irányú kirepülő részecskék okozta detektálások lehetnek a radiális aktivitás, azaz radioaktivitás mögött. Kiejtésben a "radio" szó helyett a helytelen "rádio" szó sokszor előfordul a gyakorlatban, de ennek a sugárzásnak semmi köze az audio információk távolra történő eljuttatására használt rádiófrekvenciás elektromágneses hullámokhoz.

A radioaktív izotópok tulajdonságait az ún. nuda2 adatbázisból bármelyik számítógépen vagy mobiltelefonon le tudjuk kérdezni. A "nuda2" szóra rákeresve a google internetes keresőben egy grafikus főoldal jön elő, aminek színezése lehet az izotópok bomlási típusa, felezési ideje vagy valamilyen reakciójuk valószínűsége. A természetben is megtalálható radioaktív izotópok vagy nagyon hosszú felezési idejűek, és a Föld anyagának keletkezése óta még nem bomlottak el teljesen, vagy napjainkban is keletkeznek. Ez utóbbi történhet a légkör tetején a kozmikus sugárzás hatására vagy esetleg radioaktív sorokban.

A legfontosabb ilyen izotópok a trícium, a radiokarbon, az urán 235-ös és 238-as izotópjai, a tórium 232-es izotópjai és ^{40}K . Az első kettő felezési ideje 5370 év, illetve 12,3 év. Ezek a légkör tetején a kozmikus protonok által keltett neutronok és a légköri nitrogén atommagok ütközésekor keletkeznek. A másik 4 izotóp felezési ideje a milliárd év nagyságrendű, és így ezek a Föld életkorával egy nagyságrendbe esnek.

A ^3H (atommagra gondolunk most mindig, az elektronfelhőre nem) béta-bomló izotóp. Benne két neutron található. A béta bomlás során az egyik átalakul protomná. $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}$.

1.2. A radioaktív-bomlás kvantummechanikai képben

Vizsgáljuk meg a trícium bomlásának példáján, hogy hogyan lehet a radioaktivitást kvantummechanikai képbe helyezni. A bomlás két állapot közötti átmenet. A trícium atommagja egy háromrészesecske kvantummechanikai probléma, melyben a magerők kölcsönhatása alakítja ki a 3 nukleon egy adott energiájú sajátállapotát. (Az elektromágneses kölcsönhatás nem számottevő ebben az esetben, mert csak 1 proton van a rendszerben.) A végállapotban a ${}^3\text{He}$ atommag energiasajátállapotát a magerőkön kívül a két proton közötti elektromágneses kölcsönhatás is befolyásolja. A megerő független attól, hogy proton vagy neutron vesz benne részt, ezért a magerők járuléka azonos, az elektromágneses kölcsönhatás gyengít rajta egy kicsit a ${}^3\text{He}$ -ban. Mégis a ${}^3\text{He}$ energiája az alacsonyabb, mert a trícium hátrányban van hiszen benne egy neutron van egy proton helyett, aminek a nyugalmi tömege nagyobb mint a protoné, kb. 1,7 MeV-tal. Tehát az alkotórészek tömegének eltérése miatt lesz a trícium a magasabb energiájú 3 nukleon állapot, mint a ${}^3\text{He}$. A magerőket és az elektromágneses kölcsönhatást beírva a hamilton-operátorba a kezdeti és a végállapot is stacionárius állapotok, adott energiával. Még az elektron - neutrínó páros jelenléte a végállapotban fennáll, de ezzel együtt adott energiájú állapotról van szó. Mindkét állapot kvantummechanikai hullámfüggvénye időben állandó. Semmi nem utal arra, hogy ezek az állapotok elbomlanának, vagy egymásba átalakulnának.

Az átmenet egy másik, eddig nem figyelembe vett kölcsönhatás, a gyenge-kölcsönhatás miatt van. Ennek hamilton-operátora H_β fejleszti a hullámfüggvényt a stacionáriustól eltérő módon, ami miatt létrejöhet az átmenet. Az időegységre jutó átmeneti valószínűséget a Fermi-féle Aranyszabály írja le.

A radioaktivitás egy A darab nukleon által alkotott rendszer, a magerők és az elektromágneses kölcsönhatás hamilton-operátorának megfelelő sajátállapotai közötti átmenet egy másik kölcsönhatás befolyásának eredményeképpen. Ilyenkor az időegységre jutó bomlási (átalakulási) valószínűséget a *bomlási állandó*nak nevezzük, jele λ , mértékegysége 1/s. A bomlási állandó egy adott atommag adott állapotának bomlására nézve ritkán függ a környezet állapotától. Előfordulhat, hogy egy elektron befogással bomló atommag körül megtalálható elektron hullámfüggvénye időben nem azonos, vagy két különböző esetben más és más. Ilyenkor a bomlási állandó is más lehet. A táblázatokban elektron befogások esetén a semleges atom elektronfelhőjét alapul vevő átmenet adatai szerepelnek alapértelmezésben. Ha az atomot teljesen ionizáljuk akkor a helyzet és a bomlási állandó megváltozik.

1.3. Egy bomló atommag túlélési valószínűsége adott idő alatt

A bomlási állandó értelmezése alapján egy rövid dt idő alatt egy atommag elbomlásának valószínűsége $p_1 = \lambda dt$. Ha hosszabb t ideig vizsgáljuk az atommagot, akkor a bomlási valószínűsége a $p_1 = \lambda t$ nem alkalmazható. Ehelyett tegyük fel azt a kérdést, hogy ezalatt a hosszabb t idő alatt mekkora az atommag nem elbomlásának, tehát a túlélésének valószínűsége. Ez legyen $F(t)$. A hosszabb időintervallumot fel tudjuk osztani M darab, már tényleg rövid intervallumra, $dt = t/M$. Ilyenkor minden egyes szakaszon az elbomlás valószínűsége $p_1 = \lambda dt$, a túlélésé $1 - p_1 = 1 - \lambda dt$.

A t idő alatti, azaz M darab rövid időtartamon keresztüli túlélés akkor következik be, ha minden egyes intervallumban a túlélés bekövetkezett. Ennek a valószínűsége:

$$F(t) = (1 - p_1)^M = \left(1 - \lambda \frac{t}{M}\right)^M = \left(1 - \frac{\lambda t}{M}\right)^M$$

és ha végtelen finomsággal osztjuk fel a t időt:

$$F(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{M}\right)^M = e^{-\lambda t}$$

A túlélési valószínűség időben exponenciálisan csökken, és a bomlási állandó szabja meg a csökkenés sebességét. Az exponenciális függvény tulajdonságai miatt a $t = 0$ -ban még 1 a túlélés valószínűsége természetes módon, és időközben adott idők alatt adott százalékokat csökken.

1.4. Adott hosszabb t idő múlva történő elbomlás valószínűsége

Ha azt kérdezzük, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy az atommag túléli a t időt, de pont az ezután következő $M+1$. dt intervallumban bomlik el, akkor éppen azt határozzuk meg, hogy mekkora valószínűséggel élt t ideig az atommag. Ennek valószínűség-sűrűsége van, hiszen nagyobb dt esetén nagyobb valószínűséget kapunk. Először azt számoljuk ki, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + dt)$ intervallumban bomlott el az atommag. Ez a valószínűség a t idő túlélésének és az azt követő dt -ben történő elbomlásnak a valószínűségeinek a szorzata.

$$p(t)dt = e^{-\lambda t} p_1 = e^{-\lambda t} \lambda dt$$

Ezért a keresett valószínűség-sűrűség:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Ez egyben a túlélési valószínűség idő szerinti deriváltjának abszolút értéke. Ez egybecseng azzal, hogy a túlélés valószínűsége egy kumulatív (integrált) valószínűség, aminek a valószínűségrővidéke a t idő elteltével történő bomlás.

1.5. Átlagos élettartam

Vizsgáljuk meg egy darab atommag elbomlásához szükséges idő (t_1) átlagos értékét. Ezt hívjuk *átlagos élettartam*nak. Legyen ennek jele τ . A t_1 valószínűségeloszlását már ismerjük. Ebből képezzük az átlagot.

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = -\lambda \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{-\lambda t} dt = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = \\ &= -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{0 - 1}{-\lambda} \right) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\lambda} = -\lambda \frac{-1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Tehát az átlagos élettartam a bomlási állandó reciproka.

1.6. Leánymag elbomlásának időpontja

Ha van egy λ_1 bomlási állandóval bomló atommag, de a bomláskor keletkező atommag szintén radioaktív, akkor ezt soros bomlásnak nevezzük. A bomló atommag az anyaelem, a keletkező a leányelem. A leányelem egy másik bomlási állandóval tovább bomlik (λ_2).

Az anyamag elbomlásának időpillanatának valószínűség-sűrűségét fentebb meghatároztuk. Most a leánymag elbomlásának időpontja T a kérdés. A kezdeti pillanatban még alig van annak valószínűsége, hogy a leánymag egyáltalán keletkezett már, ezért kezdetben kicsi az elbomlásának valószínűsége. Nagyon nagy idők elteltével pedig már minden elbomlik, ezért kicsi a valószínűsége annak, hogy a leányelem ilyen hosszú idő után nomlik el. A valószínűség-sűrűségnek maximuma van.

Legyen t_1 az az időpont amikor az anyaelem elbomlott, a bomlás után t_2 idővel bomlik el a leányelem. Ezért $T = t_1 + t_2$ idővel történt a leányelem bomlása.

Egy atommag elbomlásának időpontjának a valószínűségét már ismerjük. A keletkezés után $p(t_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ szerint csökken ($i = 1, 2$). (Ha egyébként a keletkezésnél később kezdjük a vizsgálatot akkor is exponenciális a csökkenés, csak más kezdőfeltétellel.)

A T egy adott értékéhez azonban végtelen sok t_1, t_2 páros tartozhat. A t_1 0 és T közé eshet bárhova. Ezért

$$p(T)dT = \int_{dt_1=0}^T p_1(t_1) dt_1 p_2(t_2) dt_2$$

Az integrálás elvégzésekor áttérünk t_1, t_2 változópárról a t_1, T változópárra. Ekkor $t_2 = T - t_1$ -et helyettesítünk be a függvényekbe, és a $dt_1 dt_2$ két dimenziós megváltozást a Jakobi-determinánssal kell átalakítani $dt_1 dT$ 2D-megváltozássá. A mátrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a determinánsa 1. Így

$$p(T)dT = \int_{dt_1=0}^T p_1(t_1)dt_1 p_2(T - dt_1)dT = dT \int_0^T \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2(T-t_1)} dt_1 = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 T} \int_0^T e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_1} dt_1$$

Az integrálást elvégezve:

$$p(T) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 T} \left[\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_0^T = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 T} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)T} - e^0) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 T} - e^{-\lambda_2 T})$$

Ezért a leánymag elbomlásának időpontjának T -nek a valószínűsége két exponenciális különbségként áll elő. Házi feladat kiszámolni, hogy ennek a függvénynek az integrálja 0-tól ∞ -ig éppen 1. Ezért ez valóban egy jó valószínűség-sűrűség függvény.

2. A radioaktivitás statisztikus jellege

Van $N > 1$ darab azonos radioaktív atomunk, melyeknek az atommagja spontán átalakulásra képes. Tegyük fel, hogy ezek nem bomlanak tovább. Ekkor a leányelem stabil, és a bomlás típusa *egyszerű bomlás*.

Feltételezzük, hogy

- az N atommag egymástól független, így a bomlások is függetlenek egymástól,
- egy atommag időegységre jutó bomlási valószínűsége, a bomlási állandó, időben állandó.

2.1. A Δt idő alatt elbomlott atommagok számának eloszlása

Vizsgáljuk a rendszert valamennyi Δt ideig, ami lehet rövid is és hosszú is. Ez alatt az idő alatt akármelyik atommag elbomlásának valószínűsége p_1 . Ha az időintervallum rövid, akkor $p_1 = \lambda dt$, ha hosszú, akkor $p_1 = 1 - e^{-\lambda t}$. Ez tehát függhet az eltelt időtől. Az el nem bomlás valószínűsége $1 - p_1$. Ha végignézzük az összes N atommagot, akkor mindnél két eset van, vagy elbomlott vagy nem. Mind az N atommagra definiáljunk egy b_i értéket, ami 0 ha nem bomlott el és 1 ha elbomlott az adott atommag ez alatt az idő alatt. A lehetséges esetek egy $b_1 b_2 b_3 \dots b_{N-1} b_N$ számsorozattal írhatók le. A számsorozatból 2^N féle van. A sorrend számít a sorozatban, hiszen az adja meg, melyik atommagról beszélünk. Minden b_i logikai esethez $p(b_i)$ valószínűség tartozik. A teljes számsor valószínűsége az egyes elemi valószínűségek szorzata, mert független eseményekről van szó. $P(\text{számsor}) = p(b_1)p(b_2) \dots p(b_3)$, és $p(b_i = 1) = p_1$ és $p(b_i = 0) = 1 - p_1$.

Kérdés most az elbomlott magok számának, az n -nek, a valószínűségeloszlása. Ha egy számsorozatban n darab 1-es van, és $N - n$ darab 0, akkor ennek a bekövetkezésének valószínűsége $P_1 = p_1^n (1 - p_1)^{N-n}$. Ez azt jelenti, hogy n darab atommag bomlott el a Δt idő alatt. Ilyen sorozatból $\binom{N}{n}$ darab van az összes számsorozat között, azaz ennyi féle módon valósulhat meg az N atommag között, hogy n atommag bomlott el. Ezért az összes N atommagból n elbomlásának valószínűsége az adott idő alatt:

$$p(n) = \binom{N}{n} p_1^n (1 - p_1)^{N-n}.$$

Azaz az elbomlott magok száma *binomiális eloszlást* követ.

Az elbomlott magok száma (n) közvetlen kapcsolatban van a minta aktivitásával is. Erre néhány alfejezet múlva visszatérünk.

A binomiális eloszlás kiszámolásakor szembe kell nézni az N alatt az n kiszámolásával, valamint két hatványra emeléssel. Másik hátránya, hogy csak egész n értékeknél alkalmazható, ami persze természetes módon adódik abból, hogy az atomok száma is egész szám. Valószínűségszámítási kérdésekben mégis előnyös lesz, ha ezt az eloszlást kicsit közelítjük. A következő alfejezetekben megmutatjuk, hogy binomiális eloszlás Poisson-eloszlásba megy át, ha $N \gg n$. Továbbá ha $N \gg n \gg 1$, akkor a Poisson-eloszlás Gauss-eloszlásba (Normál-eloszlásba) megy át. (ábra)

Bomlások számának eloszlása rövid Δt idő alatt

Ha egy rövid Δt ideig vizsgáljuk az N atommagot, az azt jelenti, hogy $\Delta t \ll 1/\lambda$, azaz $p_1 \ll 1$. Ekkor akármelyik atommag elbomlásának valószínűsége $p_1 = \lambda \Delta t$. Ilyenkor az elbomlott atommagok száma, azaz n éppen a minta aktivitásával egyezik meg. Ezért ilyenkor a minta aktivitása is binomiális (Poisson-, Gauss-eloszlást) követ.

$$p(n) = \binom{N}{n} (\lambda \Delta t)^n (1 - \lambda \Delta t)^{N-n}.$$

Bomlások számának eloszlása hosszú t idő alatt

$$p(n) = \binom{N}{n} (1 - e^{-\lambda t})^n (e^{-\lambda t})^{N-n}.$$

2.2. Az elbomlott atommagok számának átlaga

Mekkora a Δt idő alatt elbomlott atommagok számának várható értéke, \bar{n} ? Az n valószínűségi változó eloszlását ismerjük, akkor meg tudjuk határozni a várható értékét (nem precízen fogalmazva az átlagát, de az átlag a tapasztalati várható értéket jelenti, amit egy adott mért minta esetén számolunk ki).

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N np(n) = \sum_{n=1}^N n \binom{N}{n} p_1^n (1 - p_1)^{N-n} = \sum_{n=1}^N N \binom{N-1}{n-1} p_1^n (1 - p_1)^{N-n} =$$

Itt felhasználtuk az $n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$ egyenlőséget, ami ilyen felírásban $n = 1$ -re is értelmes és fennáll, $n > 1$ -re pedig az $n \frac{N \dots (N-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} = N \frac{(N-1) \dots ((N-1)-(n-1)+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)}$ alapján áll fenn. Ha n helyett bevezetjük az $m = n - 1$ -et, akkor az $n = 1$ -től induló összegzés $m = 0$ -tól indul, és $n = N$ helyett $m = N - 1$ -ig tart:

$$\bar{n} = N p_1 \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} p_1^m (1 - p_1)^{N-1-m} = N p_1 (p_1 + (1 - p_1))^{N-1} = N p_1$$

Tehát átlagosan $\bar{n} = N p_1 = N \lambda \Delta t$ darab atommag fog elbomlani a Δt idő alatt.

2.3. Az elbomlott atommagok számának szórása

Az elbomlott atommagok számának szórása (σ_n) is van természetesen. Ez megmutatja, hogy az átlag (várható érték) mennyire közelíti pontosan a valóságban statisztikusan lezajló folyamatot. Ezt a binomiális eloszlás szórásának kiszámításával tudhatjuk meg. A részletes számolásnál abból indulunk ki, hogy:

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=0}^N p(n) (n - \bar{n})^2 = \overline{n^2} - 2N p_1 \bar{n} + N^2 p_1^2 = \overline{n^2} - N^2 p_1^2$$

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^N p(n) n^2 = \sum_{n=1}^N p(n) (n + n(n-1)) = \bar{n} + \sum_{n=1}^N n(n-1) \frac{N(N-1) \dots (N-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} p_1^n (1 - p_1)^{N-n}$$

Itt a szumma első tagja $n = 1$ -re 0, ezért lehet $n = 2$ -től szummázni. Alkalmazzuk az előző egyenlőséget kétszer, az $n \geq 2$ értékekre, $n(n-1)\binom{N}{n} = N(n-1)\binom{N-1}{n-1} = N(N-1)\binom{N-2}{n-2}$, és legyen most $m = n - 2$:

$$\begin{aligned}\bar{n}^2 &= Np_1 + N(N-1)p_1^2 \sum_{m=0}^{N-2} \binom{N-2}{m} p_1^m (1-p_1)^{N-2-m} = Np_1 + N(N-1)p_1^2 (p_1 + 1 - p_1)^{N-2} = \\ &= Np_1 + N^2 p_1^2 - Np_1^2\end{aligned}$$

Emiatt

$$\sigma_n^2 = Np_1 + N^2 p_1^2 - Np_1^2 - N^2 p_1^2 = Np_1(1-p_1)$$

Tegyük fel, hogy Δt idő kicsi: $\Delta t = dt$, és így $p_1 \ll 1$. Ez most alkalmazva $\sigma_n^2 = Np_1(1-p_1) \approx Np_1$. Azt kaptuk, hogy a radioaktív bomlások statisztikája olyan, hogy

$$\bar{n} = Np_1 \approx \sigma_n^2.$$

A kísérletezés során ez nagyon hasznos. Ezen tulajdonság alapján meg tudjuk becsülni egy mérési eredmény szórását 1 darab mérésből, és nem kell sokszor egymás után megmérni mindehhez.

Ebből a *relatív szórást* is meg tudjuk határozni. $\frac{\sigma_n}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{\bar{n}}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} = \frac{1}{\sqrt{N\lambda\Delta t}}$

2.4. Aktivitás

Az adott idő alatt elbomlott magok száma (n) közvetlen kapcsolatban van a minta aktivitásával is. Az aktivitás definíciója: az időegységenkénti bomlások száma, tehát az n és az adott idő hányadosa. Azaz

$$A = \frac{n}{dt}$$

Ezen definíció esetén $dt \ll 1/\lambda$ rövid időintervallumot jelent mindig. Mivel n statisztikusan értelmezhető csak, ezért az aktivitás is statisztikusan leírható mennyiség, eloszlása van. Egy-egy mérésben aminek a paraméterei teljesen megegyeznek, más és más eredményre juthatunk, ha megmérjük az elbomlott atommagok számát. Ezt általában a kibocsátott részecskék számának mérésével tesszük. Ez jelenti azt, hogy a radioaktivitásnak statisztikus jellege van.

A fenti definíció alapján az aktivitás valószínűségeloszlását egy nyújtással lehet kiszámolni, $n = A\alpha$, emiatt $dn = dA\alpha$ és $\alpha = dt$, valamint $p(n)dn = p(A)dA$ alapján:

$$p(A) = \frac{p(n)dn}{dA} = p(n)dt = dt \binom{N}{n} (\lambda dt)^n (1 - \lambda dt)^{N-n} = dt \binom{N}{A dt} (\lambda dt)^{A dt} (1 - \lambda dt)^{N - A dt}$$

Az átlagos aktivitás könnyen kiszámolható az elbomlott magok átlagos számából:

$$\bar{A} = \frac{\bar{n}}{dt} = \frac{Np_1}{dt} = \frac{N\lambda dt}{dt} = \lambda N$$

Mostantól az átlagos aktivitást fogjuk aktivitásnak nevezni.

$$A(t) = \lambda N(t)$$

2.5. A binomiális eloszlás közelítése Poisson eloszlással (matematikai kiegészítés 1.)

Feltesszük, hogy a bomló atommagok száma elég nagy az adott idő alatt elbomlott magok számához képest.

$$N \gg n \geq 0$$

Ekkor egyébként az

$$N - n \gg 1$$

is fennáll. A binomiális eloszlásban szereplő $\binom{N}{n}$ kombinatorikai faktort fogjuk közelíteni.

$$\binom{N}{n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Ebben nagyon sok szorzás szerepel, ezért számítógépes kiszámolási idő is nagy. A faktoriálisokat közelíthetjük nagy számok ($k = N, N-n$) esetén analitikus függvényekkel, amelyek számítógéppel gyorsabban és könnyebben kiszámolhatók a Stirling-formula segítségével.

$$k! \simeq \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$$

Az $\binom{N}{n}$ képletében a három faktoriálisból kettőt közelítünk most a Stirling-formulával, ha $N \gg 1$ és $N-n \gg 1$:

$$\binom{N}{n} \simeq \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}}{n! \left(\frac{N-n}{e}\right)^{N-n} \sqrt{2\pi(N-n)}} = \frac{N^N}{n!(N-n)^{N-n}} e^{-N+N-n} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-n}} = \frac{N^n N^{N-n}}{n!(N-n)^{N-n}} e^{-n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{N}}}$$

Ezért a binomiális eloszlást a következőképpen közelíthetjük:

$$\begin{aligned} p(n) &= \binom{N}{n} p_1^n (1-p_1)^{N-n} \xrightarrow{N, N-n \gg 1} p_1(n) = p_1^n (1-p_1)^{N-n} \frac{N^n N^{N-n}}{n!(N-n)^{N-n}} e^{-n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{N}}} = \\ &= p_1^n N^n \frac{(N-Np_1)^{N-n}}{n!(N-n)^{N-n}} e^{-n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{N}}} = \frac{(p_1 N)^n}{n!} \left(\frac{N-Np_1}{N-n}\right)^{N-n} e^{-n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{N}}} \end{aligned}$$

Ebből a zárójeles tag nagy $N-n$ értékek esetén:

$$\left(\frac{N-Np_1}{N-n}\right)^{N-n} = \left(\frac{N-n+n-Np_1}{N-n}\right)^{N-n} = \left(1 + \frac{n-Np_1}{N-n}\right)^{N-n} \xrightarrow{N-n \gg 1} e^{n-Np_1}$$

A gyökös tag a $N \gg n$ feltétel miatt egyhez tart:

$$\lim_{n/N \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{N}}} = 1$$

Ezért

$$p_1(n) \rightarrow p_2(n) = \frac{(p_1 N)^n}{n!} e^{n-Np_1} e^{-n} = \frac{(p_1 N)^n}{n!} e^{-Np_1} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Ez egy λ paraméterű Poisson-eloszlás (ezt a λ -t nem szabad összekeverni a bomlási állandóval), ahol $\lambda = Np_1$, ami az eloszlás átlaga és a szórásnégyzete is egyben. Itt az n még lehet kicsi egész szám.

2.6. A Poisson eloszlás közelítése Normál-eloszlással (matematikai kiegészítés 2.)

Ha azt is feltesszük, hogy

$$n \gg 1,$$

akkor a fennmaradó $n!$ -t is közelíthetjük a Stirling-formula segítségével. Összességében $N, N - n \gg n \gg 1$ közelítések vannak már feltéve.

$$p_2(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \xrightarrow{n \gg 1} p_3(n) = \frac{\lambda^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n e^{n-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n \ln \frac{\lambda}{n}} e^{n-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n \ln \frac{\lambda}{n} + n - \lambda}$$

A kitevőt nevezzük el $K(n)$ -nek.

$$K(n) = n \ln \frac{\lambda}{n} + n - \lambda.$$

Most szorítkozzunk azokra az n értékekre, amikor n az átlag (λ) körül van, így $\frac{\lambda}{n} \approx 1$, avagy $n \approx \lambda$. Ilyenkor $\lambda - n \ll n$, és $\delta = \frac{\lambda - n}{n} \ll 1$.

A kitevőben lévő logaritmust sorbafejtjük 1 körül, és az első tagig megyünk el, akkor

$$K(n) = n \ln \frac{\lambda}{n} + n - \lambda = n \ln \left(1 + \frac{\lambda - n}{n}\right) + n - \lambda = n \frac{\lambda - n}{n} + n - \lambda = \lambda - n + n - \lambda = 0$$

Ezért a logaritmusfüggvény Taylor-soránál a második tagig kell elmenni. $\ln(1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2}$.

$$K(n) = n \ln \frac{\lambda}{n} + n - \lambda = n \left(\frac{\lambda - n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - n}{n} \right)^2 \right) + n - \lambda = -\frac{(\lambda - n)^2}{2n}$$

Ezzel a közelítéssel $p_3(n)$ továbbírható:

$$p_3(n) \xrightarrow{\lambda - n \ll n} p_4(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(\lambda - n)^2}{2n}}$$

Ez formailag hasonlít egy Gauss-görbéhez, de a szórásnégyzet helyén a változó n szerepel. De igazából az n a λ körüli értékeire szorítkoztunk, ezért közelítsük n -et a következő módon: $n = \lambda - \lambda + n = \lambda(1 + \frac{n-\lambda}{\lambda}) \approx \lambda$. Ilyenkor $\frac{n-\lambda}{\lambda} \ll 1$ közelítést használjuk. A $p_4(n)$ -ben három helyen szerepel az n , ebből a kitevő számlálójába behelyettesítve ezt a közelítést 0-t kapnánk, ezért ott nem alkalmazzuk, csak a másik két esetben, ahol megtehető. Ezzel:

$$p_4(n) \xrightarrow{\lambda - n \ll n} p_5(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(\lambda - n)^2}{2\lambda}}$$

formulát kapjuk, ami azt mutatja, hogy a Poisson-eloszlást átalakítottuk a fenti közelítésekkel egy normál eloszlásba, aminek alakja $p_5(n)$ Gauss-görbe. Ez nemcsak egész n értékekre számolható ki, hanem minden valós változó esetén.

A direkt sorbafejtési módszer. (Matematikai kiegészítés)

Matematikailag precízen is eljárhatunk, és egy általános sorbafejtéssel is megkaphatjuk a Normál-eloszlást. A Poisson eloszlásban az $n!$ -t a Stirling-formulával közelítve kapott $p_3(n)$ függvényt írjuk át exponenciális alakra:

$$p_3(n) = \frac{\lambda^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \frac{\sqrt{\lambda} \lambda^n}{\sqrt{n} n^n} e^{n-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{n-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{(n+\frac{1}{2}) \ln \frac{\lambda}{n} + n - \lambda}$$

A kitevő

$$M(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{\lambda}{n} + n - \lambda$$

függvényét fejtsük sorba $n = \lambda$ körül. Ennél a pontnál az $M(n)$ értéke: $M(\lambda) = (\lambda + \frac{1}{2}) \ln 1 + \lambda - \lambda = 0$.

$$M'(n) = \ln \frac{\lambda}{n} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{n - \lambda}{\lambda n^2} + 1 = \ln \frac{\lambda}{n} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n} + 1 = \ln \frac{\lambda}{n} - 1 - \frac{1}{2n} + 1 = \ln \frac{\lambda}{n} - \frac{1}{2n}$$

Ennek az $n = \lambda$ pontban fekvett értékére lesz szükségünk: $M'(\lambda) = \ln 1 - \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{2\lambda} \approx 0$. Ez azért kb. 0, mert a $n \gg 1$ közelítést már használtuk, ezért $\lambda \gg 1$ is fennáll. Emiatt a második tagig el kell menni a sorbafejtésnél.

$$M''(n) = \frac{n - \lambda}{\lambda n^2} + \frac{1}{2n^3} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3}$$

Az $n \gg 1$ közelítés miatt második tag itt is elhanyagolható. Ezekkel $M(n)$ Taylor-sora:

$$M(n) = M(\lambda) + M'(\lambda)(n - \lambda) + \frac{1}{2}M''(\lambda)(n - \lambda)^2 = 0 - \frac{n - \lambda}{2\lambda} + \left(-\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3}\right)(n - \lambda)^2$$

Nézzük meg melyik tagok hanyagolhatók el:

$$M(n) = -\frac{1}{2\lambda}(n - \lambda)^2 \left(\frac{1}{n - \lambda} + 1 - \frac{1}{2\lambda^2}\right) \approx -\frac{1}{2\lambda}(n - \lambda)^2$$

A harmadik tag minden n mellett elhagyható, de az első tag $n = \lambda$ körüli értékei esetén egyáltalán nem hanyagolhatók el. Például $n = \lambda + 1$ esetén az első és a második tag azonos. És valóban a Poisson eloszlás nem szimmetrikus függvényét alakítottuk egy az átlagra szimmetrikus Gauss-görbévé. Ezért az átlag környékén valóban nem elhanyagolható transzformációra van szükség. A zárójeles tag megadja ezt a transzformációt, de néhány λ -közeli n -től eltekintve valóban visszaadja a Gauss-alak a Poisson, a zárójel kb. 1.

Ezzel megkaptuk az elbomlott atomok eloszlását ebben a közelítésben. A λ helyére \bar{n} -t írunk, mert a Poisson eloszlás paramtéeréről van szó, ami az eloszlás átlagát fejezi ki, és hogy ne keverjük össze a bomlási állandóval:

$$p_6(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}},$$

ami egy normált Gauss-görbe, és olyan Normál-eloszlást ír le, aminek a szórásnégyzete megegyezik a várható értékével.

3. Az egyszerű bomlás leírása

3.1. Az el nem bomlott atommagok számának időfüggése

Hogyan változik a megmaradt atommagok száma $N(t)$ időben? Kérdés, hogy az időt milyen finomsággal változtatjuk. Ha az $N(t)$ függvényt pontosan meg akarjuk határozni, akkor tudnunk kell minden egyes atommagról, hogy mikor bomlott el, és ebben a pillanatban az $N(t)$ értéke eggyel csökken. Azaz igazából az $N(t)$ ugrásfüggvények $\Theta(t_i)$ összege. Az i . atommagot leíró ugrásfüggvény értéke kezdetben 1, egészen t_i -ig, és onnan kezdve pedig 0. $N(t) = \sum_i \Theta(t_i)$. De t_i statisztikusan változik minden i -re és minden egyes valóságos esetben más-más lesz.

3.1.1. Az egyszerű bomlás differenciálegyenlete

Az el nem bomlott atommagok számának pontos ismerete helyett, vizsgáljuk meg, hogy ezek számának **várható értéke** hogyan változik. Ez azt jelenti, hogy az ugrásfüggvényekkel leírt időfüggéseket megvizsgáljuk nagyon sok esetben és ezen görbék átlagát kiszámoljuk. Ez az átlag deriválható, folytonos függvény

lesz már. Közelítsük meg úgy a kérdést, hogy az $N(t)$ függvény helyett a sok esetre átlagolt átlagos értékét akarjuk ismerni. Ezt hívjuk $N_{\bar{a}}(t)$ -nek. Egy időintervallumban a kezdeti $N_{\bar{a}}(t)$ értékről átlagosan \bar{n} darabbal fog csökkenni a darabszám $N_{\bar{a}}(t + \Delta t)$ -re. Azaz

$$N_{\bar{a}}(t + \Delta t) - N_{\bar{a}}(t) = \Delta N_{\bar{a}} = -\bar{n} = N_{\bar{a}}(t)p_1 = -N_{\bar{a}}\lambda\Delta t$$

A negatív előjel jelzi, hogy csökken a darabszám. A Δt -t nagyon kis értékek felé csökkentve az *egyszerű bomlás differenciálegyenletéhez* jutunk:

$$\dot{N}_{\bar{a}}(t) = -\lambda N_{\bar{a}}(t)$$

Az eddigiek alapján látszik, hogy ez nem írja le a valós és statisztikusan változó időfüggést, hanem csak a megmaradt atommagok számának sok egymástól független, de azonos körülmények között megvizsgálat esetre átlagolt időfüggését adja meg. Nagy N_0 kezdeti atommagszám értékek mellett az eltérést százalékosan megadó relatív szórás kicsi lesz. Pontosabban $\frac{\sigma_n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{N\lambda\Delta t}}$ miatt $N\Delta t \gg 1/\lambda$ esetén a statisztikus szórás kicsi lesz, és az igazi $N(t)$ függvényt jó közelítéssel visszaadja ennek a differenciálegyenletnek az $N_{\bar{a}}(t)$ megoldása. A továbbiakban az átlagot nem írjuk ki a darabszám függvényénél, hanem automatikusan mindig arra gondolunk.

Az exponenciális bomlástörvény

Az egyszerű bomlás differenciálegyenletének megoldása az exponenciális függvény. Erről meg lehet győződni egyszerűen kipróbálással. A megoldás neve *exponenciális bomlástörvény*, megjegyezzük, hogy ez csak az egyszerű bomlásra vonatkozik ilyen egyszerű formájában.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Az ellenőrzés:

$$\dot{N}(t) = N_0 \frac{d}{dt} (e^{-\lambda t}) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N(t).$$

N_0 a kezdeti atommagok számát jelenti.

Az egyszerű bomlás esetén a megmaradt magok számának deriváltjának abszolút értéke megegyezik az aktivitással. Ugyanis egyszerű bomlásnál a radioaktív atommag nem keletkezik, csak bomlik. A változás csak a bomlásból ered, ezért az időegységenkénti darabszám változás egyben az időegységenkénti bomlások számát adja meg. Általánosabb esetekben tud az atommag keletkezni is. Ilyenkor az aktivitásba csak a bomlások számát szabad belevenni, a keletkezési sebességet nem. Pedig ez utóbbi a darabszám időfüggvény deriváltjában jelentkezni fog. Ezért általánosabban az $A(t) = \lambda N(t)$ formulával definiáltuk az aktivitást.

3.2. Felezési idő

Felezési idő az az idő, ami alatt a kezdeti magok száma átlagosan a felére csökken.

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Az exponenciális bomlástörvény alapján:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{\lambda T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \lambda T_{1/2}$$

Ebből:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Ebből az is adódik, hogy az átlagos élettartam hosszabb a felezési időnél. $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1,44 T_{1/2}$ Például a szabad neutron felezési ideje 614 másodperc=10,23 perc, élettartama pedig 886 másodperc=14,76 perc.

Az exponenciális bomlástartózkodást a felezési idővel is felírhatjuk. Gyakran ez gyakorlati szempontból könnyebben kezelhető, mint a bomlási állandó értéke.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

4. Radioaktív kormeghatározás 1. (természettudományos kiegészítés 1.)

A természetben jelen lévő trícium és radiokarbon izotópok aktivitáskonzentrációja az élő szervezetekben ismert konstans. Ezek az izotópok a felső légkörben keletkeznek, a földi légköri körzésekkel és a meteorológiai áramlásokkal lejutnak a felszínre, és homogén módon van egy fluxusuk a felszínen, amit az élő szervezetek az anyagcseréjükkel a testük anyagába építenek be. Ez a beépítési sebesség egyensúlyba kerül az izotópok aktivitása miatti csökkenéssel, és így alakul ki a konstans fajlagos trícium és radiokarbon aktivitás. Ha a Nap folyamataiban változás következik be, és a napszél intenzitása is megváltozik, akkor ez a konstans el tud tolni. De ezek ezer éves skálán nem változtak ismert módon a legutóbbi időkben. (Korábban elvileg nincs kizárva.) Sajnálatos módon az 1964 előtti légköri nukleáris tesztkísérletek földfelszín feletti robbantásai megváltoztatták ezt a konstans, és egy mesterséges többletforrást jelentettek mindkét izotópból. A ^{14}C koncentrációja a légkörben a kétszeresére emelkedett. De ezek korrekciója után a trícium és a radiokarbon aktivitásának mérésével meg tudjuk állapítani ismeretlen minták korát.

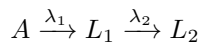
Ennek alapja, hogy az A_0 aktivitás az élet megszűnésének pillanatában, az ismert konstansból kiszámolható, és ez az évek során ismert módon az egyes izotópok felezési idejét ismerve kiszámíthatóan csökkent.

$$\frac{A_{\text{mért}}}{A_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_{\text{mért}}}{A_0} = T_{1/2} \log_2 \frac{A_0}{A_{\text{mért}}}$$

A földfelszínen tapasztalható konstans a tríciumra: minden 10^{18} . hidrogén atom helyén ül egy trícium atom. A felszín alatt áramló vizekben a keletkezés megszűnik, nincs tríciumutánpótlás, és a vizek áramlásuk során veszítenek a trícium aktivitásukból. Ugyanígy történik, ha valahogy víztartalmú anyagot hibernetikusan egy palavba zárnak parafa dugóval. Ezeknek a vizeknek az élettartama a radioaktivitásuk alapján meghatározható. A ^{14}C atomokra az arány kisebb, több radiokarbon épül be szénatomonként. Minden 2×10^{12} szénatomra jut egy radiokarbon. A radiokarbon felezési ideje 5730 év, 5 felezési idő alatt nagyjából már a detektálási küszöb alá esik az aktivitása, ezért kb. 30 ezer éves leletek korát lehet így meghatározni a mai legprecízebb detektorokkal. További részletek találhatóak itt. Meg kell említeni, hogy a napjaink legpontosabb meghatározási technikája nem a radioaktivitáson alapul, hanem a gyorsítótechnikán. Ebben gyorsító tömegspektrométerekkel határozzák meg a 12-es és a 14-es szénatomok számának arányát mindenféle mintában.

5. Soros bomlás

A soros bomlásban az anyaelem (A) bomlása után keletkezett leányelem szintén radioaktív, és λ_2 bomlási állandóval elbomlik az L_2 unokaelemmé.



Az anyaelemek átlagos darabszámát az $N_1(t)$ függvény írja le, míg az L_1 leányelemek átlagos számát az $N_2(t)$ függvény. A kérdés ezen két függvény leírása. Az anyaelem egyszerű bomlást végez, ezt már megoldottuk. Differenciálegyenlete, és annak megoldása, ha kezdetben N_{10} darab van belőlük:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \quad \text{és a megoldás} \quad N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

5.1. A leányelemek számának időfüggése

A leányelem differenciálegyenletében a darabszámuk időegységenkénti megváltozásában továbbra is ugyanolyan bomlási tag szerepel, mint az egyszerű bomlásban. Lesz azonban egy keletkezési tag is. Pont annyi leányelem keletkezik, mint amennyi anya elbomlott egy adott idő alatt. A keletkezési tag az anyaelem aktivitása:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

Ez egy inhomogén, lineáris, első rendű differenciálegyenlet. Az $N_2(t)$ általános megoldását egy inhomogén és egy homogén megoldásból tesszük össze. Az inhomogén megoldás egy akármilyen módszerrel kitalált megoldása a differenciálegyenletnek. Esetünkben érdemes $N_{2\text{inh}}(t) = B e^{-\lambda_1 t}$ alakkal próbálkozni:

$$\dot{N}_{2\text{inh}}(t) = -\lambda_1 B e^{-\lambda_1 t} = -\lambda_2 N_{2\text{inh}}(t) + \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = -\lambda_2 B e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

Mindkét oldalt elosztjuk az exponenciális függvénnyel, akkor

$$-\lambda_1 B = -\lambda_2 B + \lambda_1 N_{10} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Így az

$$N_{2\text{inh}}(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

jó megoldása a differenciálegyenletnek.

A homogén megoldás esetén a $\lambda_1 N_1(t)$ -s tag nem szerepel, marad az egyszerű bomlás típusú egyenlet, és a megoldása:

$$\frac{dN_{2\text{hom}}(t)}{dt} = -\lambda_2 N_{2\text{hom}}(t) \quad \Rightarrow \quad N_{2\text{hom}}(t) = A e^{-\lambda_2 t}.$$

Ezzel a leányelemek számának időfüggése két exponenciális összege lesz.

$$N_2(t) = A e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

Az A meghatározásához a kezdeti feltételeket kell rögzíteni. Általános kezdeti feltétel például, az $N_2(0) = N_{20}$. Ezzel:

$$N_2(0) = N_{20} = A + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \Rightarrow \quad A = N_{20} - \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Így a megoldás:

$$N_2(t) = N_{20} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Általában az a helyzet, hogy a kezdeti időpillanatban a leányelemek száma 0, még nem volt idejük keletkezni. Ezt az $N_{20} = 0$ esetet is le lehet olvasni a fenti megoldásból. Ez a függvény azt is mutatja, hogy ha van egy N_{10}, N_{20} kezdeti feltétel, akkor ezeket külön is lehetne választani, és a két szétválasztott rendszer megoldásainak összege a megoldás. Azaz külön megoldjuk a kezdeti N_{20} darab leányelem darabszámának időfüggését, és ehhez adjuk hozzá az $N_{20} = 0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldást. A konklúzió az, hogy elég általában az $N_{20} = 0$ megoldását ismerni, ehhez később hozzá lehet adni az eggyel egyszerűbben megoldható N_{20} -hoz tartozó esetet.

Az $N_{20} = 0$ kezdeti feltétel megoldása $N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ grafikusán is elképzelhető. A 0-ból indul, hiszen mindkét exponenciális 1 kezdetben, és végtelen idő múlva szintén mindkét tag egyenlő lesz (0). Ezért $t = 0$ -nál és a végtelenben a függvény értéke 0. Közben pozitív, ezért van maximuma. A maximumhoz tartozó időt a függvény deriválásával meg lehet keresni, és az ehhez tartozó darabszámot is kiszámolhatjuk.

5.2. Teljes aktivitás

A soros bomlásban már két izotópnak van aktivitása. Ezért a minta teljes aktivitását is ki tudjuk számolni általános esetben, ha n izotópból áll:

$$A_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i(t)$$

Érdekes, hogy a sorosan bomló izotópot tartalmazó minta teljes aktivitása az idővel kezdetben nem csökken, hanem nő. Ez a leányelemek felhalmozódása miatt van. Így előfordulhat, hogy egy ismeretlen mintát egyszerű eszközökkel vizsgálva meglepő módon az exponenciális bomlástörvény helyett növekedést látunk. Például egy tiszta radonmintát vizsgálunk alfa-részecskék számlálására lakmas detektorral, akkor a leányelemének az alfa-részecskéit is összeszámoljuk, amennyiben a kettő energiájának különbségének szétválasztására nincs mód. Ilyen például egy folyadékszcintillációs spektrométer. Ilyenkor a $^{222}\text{Rn} \rightarrow ^{218}\text{Po} \rightarrow ^{214}\text{Pb} \dots$ soros bomlásban a kezdeti radonaktivitásnak megfelelő beütési intenzitás elkezd növekedni a teljes aktivitás formulájának megfelelően.

$$A_{\text{tot}} = \lambda_1 N_1(t) + \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

A teljes aktivitás formulájának vizsgálatából az is következik, hogy ha minden bomlási állandót az α -szorosára változtatjuk, akkor nem meglepő módon a teljes aktivitás is az α -szorosára fog változni. Ha az aktivitás tengelyt átskálázzuk $A' = \alpha A$ egységekre, és ha az időt is átskálázzuk: $t' = \alpha t$ szerint mérjük, akkor az eredeti függvényalakokat kapjuk vissza.

6. Radioaktív egyensúly

Egy soros bomlásban az anyamagok aktivitása $A_1(t) = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$, az $N_{20} = 0$ kezdeti feltételhez tartozó esetben a leányelem aktivitása $A_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$. Ez a két függvény matematikailag sosem lehet azonos egy időintervallumon. Ezért csak egy adott pillanatra lehet igaz, hogy egy anya és egy leányelem aktivitásai megegyezzenek, $A_1 = A_2$, és pont annyi leányelem keletkezzen, mint amennyi elbomlik. Az egyensúlyt másképpen kell keresni.

Természetesen igaz lehet az, hogy a λ_2 bomlási állandójú exponenciális értéke elhanyagolható a másikkhoz képest, mert a λ_2 annyival nagyobb a λ_1 -nél. Ilyen határeset fennáll sok esetben, de az egzakt egyensúlyt másképpen definiáljuk.

Az az anya és a leányelem közötti radioaktív egyensúly definíciója: a két aktivitás aránya közelítőleg egyezzen meg. Minden r_0 maximális eltéréshez létezen olyan t_0 beállási idő, amelyekre:

$$\left| \frac{A_2(t)}{A_1(t)} - R \right| < r_0 \quad \text{ha } t > t_0$$

és R egy időtől független konstans.

A két aktivitás időfüggvényét be tudjuk írni a korábbi megoldások alapján $N_{20} = 0$ kezdőfeltétellel.

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t})$$

a) Ha $\lambda_1 > \lambda_2$, akkor $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ exponenciálisan növekedő függvény, az arány nem lesz konstans.

b) Ha $\lambda_1 < \lambda_2$, akkor $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ exponenciálisan lecsengő függvény, és egy idő után értéke bármilyen kis pozitív szám alá csökken. Ilyenkor az aktivitások aránya $\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} > 1$ értékhez tart, és beáll a radioaktív egyensúly. $R = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Ilyenkor az $(1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t})$ függvény monoton nő, azaz exponenciálisan feltöltődik.

$$\left| \frac{A_2(t)}{A_1(t)} - R \right| = R - R(1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}) = R e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} < r_0 = \varepsilon R,$$

Itt ε a relatív eltérés. Az egyenlőtlenség akkor áll fenn, ha $e^{\lambda_1 - \lambda_2}$ eléri ε -t, és utána ez alá csökken, mert monoton csökkenő függvény. A t_0 beállási időre emiatt fennáll: $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_0} = \varepsilon$.

$$t_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \varepsilon$$

Megjegyezzük, hogy a számláló és a nevező is negatív szám. Az egyensúly beállási ideje egy tipikus ε , mondjuk legyen 5%, esetén, amikor másrésről a $\lambda_1 < \lambda_2$ -n túl még el is hanyagoljuk a λ_1 -et:

$$t_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln 0.05 \simeq \frac{\ln 0.05}{-\lambda_2} = \frac{-T_2 \ln 0.05}{\ln 2} = 4.3T_2$$

Ezen beállási idő után az $A_2 \simeq \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1$, A két aktivitás azonos időállandóval cseng le. Lásd az ábrán a mozgó egyensúly grafikont.

A b) eset egy speciális esete, amikor λ_1 nemcsak kisebb λ_2 -nél, de fennáll: $\lambda_1 \ll \lambda_2$ is. Ilyenkor $R = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx 1$. Ez azt jelenti, hogy a két atommag aktivitásainak aránya jó közelítéssel 1, azaz a két aktivitás megegyezik.

Ezt hívják szekuláris (évszázados) egyensúlynak.

$$A_1 = A_2$$

Ilyenkor az anyaelemek száma igazából nem konstans, hanem nagyon lassan csökken, a mérésekkel általában nem észrevehető módon. Pl. a ^{238}U 4.4 milliárd éves felezési idejéhez képest bármilyen emberi léptékű mérés nagyon rövid idő. Ezalatt ugyan csökken az urán atommagok száma, de ez teljesen elhanyagolható. De mégis kimutatható a változás.

7. Párhuzamos bomlás

Vannak olyan atommagok, amelyek β^+ és β^- bomlásra egyaránt képesek. Ilyenekre például azok az atommagok közül jónéhány, amelyekben páratlan számú proton és páratlan számú neutron található. Mindkét nukleon párosítatlanul mozog az atommagban, és ha az egyik átalakul a másikba, vagy fordítva, mindkét esetben ki tud alakulni egy nukleon pár. Ez a párbaállás pedig extra magerő kötési energiához vezet. Azaz mindkét irány energianyereséges. A ^{128}I példája látható például a következő linken található ábrának a bal alsó kis ábráján: kép. Egy másik ilyen példa a ^{40}K . Ez azért is fontos, mert ez a természetben megtalálható egyik leggyakoribb radioaktív izotóp. Ennek oka az, hogy a legstabilabb kálium izotóp, a 39-es mellett van 1 neutronnal, és a felezési ideje 1.3×10^9 év, emiatt még nem bomlott el a Föld anyagának keletkezésekor kialakult ^{40}K nagy része. Minden kálium 0,013%-a ilyen. Elég sok kálium van például a sejtekben a membrán nátrium-kálium pumpája miatt, így az élő szervezetek radioaktivitásának legfontosabb oka ez az izotóp. Mindkét β -bomlása létezik:



$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda_1 N(t) - \lambda_2 N(t) \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{ahol} \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$\lambda_1 = \lambda \cdot 0.89$, $\lambda_2 = \lambda \cdot 0.11$, és $\lambda = \ln 2 / 1.3 \times 10^9$ év.

Parciális felezési idő. A teljes bomlási valószínűségből számolható a felezési idő. De a parciális bomlási állandókból kiszámolhatjuk a parciális felezési időket. Mekkora lenne az izotóp felezési ideje, ha csak ezen az egy módon tudna elbomlani az atommag. A parciális felezési idők reciprokosan adódnak össze.

A ^{40}K magjából kilépő elektronok száma annyi, mint ez a fajta aktivitása a mintának $= A_1 = \lambda_1 N(t) = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda t} = g_1 \lambda$.

Elágazási arány vagy csatorna arány. Ez a 89% és a 11% a fenti esetben. Ha egy izotóp n -féle módon tud elbomlani párhuzamosan, azaz ennyi egymással versenyző lehetőség van, akkor az ezekhez tartozó teljes bomlási állandó $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Az elágazási arány

$$g_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{k=0}^n \lambda_k}.$$

8. Radioaktív bomlási sor

A soros bomlásban a leányelem általában szintén radioaktív, és ennek a leányeleme is, és a sor folytatódik sok lépésben, amíg egy stabil izotóphoz nem ér el. Tegyük fel, hogy az anyaelem bomlásával együtt még $n - 1$ lépésben jutunk el a stabil atommagig, ami a sor vége. Ilyenkor n db tagja van a radioaktív sornak. Ha egy kezdeti izotóp-eloszlásból elindítjuk a rendszert, akkor a bomlások révén a darabszámok megváltoznak. A feladat az $N_i(t)$ függvény kiszámolása egy adott kezdeti feltételhez. A soros bomlásban már láttuk, hogy ha kezdetben többféle izotóp is jelen volt a rendszerben, akkor ezek alakulását külön-külön is kezelhetjük, kiszámolhatjuk bármelyik elem darabszámának az időfüggését, majd utána ezeket összeadjuk. Az atommagok egymástól függetlenül bomlanak el. Ezért nem sérti az általánosságot, ha a kezdeti feltétel az, hogy az anyaelemből van N_{10} , a többiből pedig 0. Ha ezt megoldjuk, akkor receptet adtunk egy olyan esethez is, amikor a második elemből van N_{20} darab kezdetben, és azt is meg tudjuk oldani a módszerrel. Ennek eredményeit aztán az elsőhöz hozzá lehet adni.

Az i . izotóp időbeli megváltozását a következő differenciálegyenlet adja meg:

$$\dot{N}_i(t) = -\lambda_i N_i(t) + \lambda_{i-1} N_{i-1}(t).$$

Az első $i - 1$ egyenlet megoldása után $N_i(t)$ már ismert. Ezért ez egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. Ugyanúgy mint az egy lépéses soros bomlásban, csak az inhomogén tag várhatóan bonyolultabb lesz. Az első tag az i . izotóp bomlását fejezi ki, a második az anyaelemének az aktivitását. Most feltettük, hogy a sorban nincs elágazás, ezért az $i - 1$. izotóp teljes aktivitása az i . izotóp keletkezésére fordítódik.

8.1. Kitekintés az elágazásos esetre.

Ha elágazás lenne, akkor az A_{i-1} -nek csak egy része bomlana az i . izotópba, a másik része az elágazás másik végeredmény izotópjának számát növelné. Ilyenkor a csatornaarány mutatja meg a keletkezett i . izotópok számát időegység alatt. Az $i - 1$ -izotópból az i -be menő elágazási arány $g_{i-1,i}$:

$$\dot{N}_i(t) = -\lambda_i N_i(t) + g_{i-1,i} \lambda_{i-1} N_{i-1}(t).$$

Elágazás nélküli esetben $g_i = 1$, egyébként, mint már az előbb láttuk $g_{i-1,i} = \frac{\lambda_{i-1,i}}{\sum_{k=0}^n \lambda_{i-1,k}}$. Itt $\lambda_{i-1,i}$ az $i - 1$. izotópból az i -be történő bomlás bomlási állandóját jelenti.

8.2. Általános megoldási fogás.

A $g_{i-1,i} = 1$ esetet oldjuk most meg. A megoldáshoz felhasználunk egy matematikai fogást, ami az első rendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenleteknél általában alkalmazható. A megoldandó

egyenlet, és az átalakított változatai:

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) + f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{y}(t) + \lambda y(t) = f(t) = e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} y(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} y(t)) = e^{\lambda t} f(t)$$

Itt mindkét oldalt már tudjuk idő szerint integrálni, és még egy kis átalakítás után megkaptunk egy eljárást az $y(t)$ megoldás kiszámolására.

$$\int \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} y(t)) dt = \int e^{\lambda t} f(t) dt + K \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda t} y(t) = \int e^{\lambda t} f(t) dt + K$$

Ebből adódik a megoldás receptje, [EÁELIDMR]=Elsőrendű, Állandó Együtthatós, Lineáris, Inhomogén Differenciálegyenletek Megoldási Receptje:

$$y(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} f(t) dt + K e^{-\lambda t}.$$

A megoldás második tagjában felismerhetjük a homogén megoldást egy a kezdeti feltételektől függő konstanssal, és az első tag egy általános forma az inhomogén tag előállítására.

8.3. A bomlási sor i . tagjának megoldása

Az első két tagja a bomlási sornak már ismert. Az egyszerű bomlás, és a soros bomlás során ezeket megoldottuk. A sor első tagjánál egy exponenciális volt a megoldás, a második tagnál két exponenciális. Az n . tagnál n darab exponenciális összege lesz a megoldás. Ezt teljes indukcióval látjuk be.

Feltesszük, hogy az $i-1$. tag $i-1$ darab exponenciális összege, és alkalmazzuk az EÁELIDMR receptet. Itt az addigi exponenciálisokhoz az $e^{-\lambda_i t}$ újabb exponenciális fog hozzájönni. Ezt a homogén tagból már látjuk. Az inhomogén tag esetén az $y(t)$ -ben az első $i-1$ exponenciális szerepel, ezeket meg kell szorozzuk $e^{\lambda_i t}$ -vel, így $e^{(\lambda_i - \lambda_k)t}$ függvényeket kapunk $k = 1..i-1$. Ezek integrálása során a függvények maradnak, csak az együtthatóik változnak meg. Ha ezeket végül $e^{-\lambda_i t}$ -vel megszorozzuk a recept szerint, akkor visszakapjuk az eredeti $e^{-\lambda_k t}$ exponenciálisokat. Ezért az inhomogén részben nem jön be új függvény, csak a homogén részben az $e^{-\lambda_i t}$. Ezzel beláttuk, hogy

$$N_i(t) = \sum_{k=1}^i a_{ik} e^{-\lambda_k t} \quad \text{alakú.}$$

Ez az [NiÁÁ] formula, azaz $N_i(t)$ Általános Alakja. Az a_{ik} jelentése az, hogy a sor i . tagjának megoldásában az $e^{-\lambda_k t}$ függvény együtthatója mennyi. Ezt a sor $i-1$. tagjára alkalmazva

$$\dot{N}_i(t) = -\lambda_i N_i(t) + \lambda_{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1,k} e^{-\lambda_k t}$$

majd ezt behelyettesítve EÁELIDMR receptbe, azt kapjuk hogy:

$$N_i(t) = e^{-\lambda_i t} \lambda_{i-1} \int e^{\lambda_i t} \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1,k} e^{-\lambda_k t} dt + K_i e^{-\lambda_i t} = \lambda_{i-1} h(t) + K_i e^{-\lambda_i t}.$$

A $h(t)$ függvényt kiszámoljuk, az integrálás és a szumma felcserélhető:

$$e^{-\lambda_i t} \int e^{\lambda_i t} \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1,k} e^{-\lambda_k t} dt = e^{-\lambda_i t} \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1,k} \int e^{(\lambda_i - \lambda_k)t} dt = e^{-\lambda_i t} \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1,k} \frac{e^{(\lambda_i - \lambda_k)t}}{\lambda_i - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{i-1,k}}{\lambda_i - \lambda_k} e^{-\lambda_k t}$$

Ezzel

$$N_i(t) = \lambda_{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{i-1,k}}{\lambda_i - \lambda_k} e^{-\lambda_k t} + K_i e^{-\lambda_i t} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_k} a_{i-1,k} e^{-\lambda_k t} + K_i e^{-\lambda_i t}.$$

Ebből leolvashatjuk az a_{ik} , már az i . függvényhez tartozó együtthatókat NiÁA alapján:

$$N_i(t) = \sum_{k=1}^i a_{i,k} e^{-\lambda_k t} + K_i e^{-\lambda_i t} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_k} a_{i-1,k} e^{-\lambda_k t} + K_i e^{-\lambda_i t}.$$

Amiből a következő [NiRF] rekurziós formulát kapjuk $k = 1 \dots i - 1$ esetekre :

$$a_{ik} = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_k} a_{i-1,k}$$

A $k = i$ esetben az $e^{-\lambda_i t}$ tag együtthatóját kell megnézni, ami éppen K_i : $a_{ii} = K_i$ adódik. K_i -t a kezdeti feltételből lehet meghatározni, ami $N_{i>1}(t) = 0$.

$$N_i(0) = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} e^0 + K_i e^0 = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} + K_i = 0 = \sum_{k=1}^i a_{ik} = 0$$

Ez az [NiKF] formula, ($N_i(t)$ Kezdeti Feltétele). Ebből kijön az $N_i(t)$ megoldásához szükséges utolsó konstans:

$$K_i = a_{ii} = - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}$$

Ezzel meghatározhatjuk az $N_i(t)$ időfüggésének alakját, ha a rekurziókat elvégezzük.

Vizsgáljuk meg mit ad a rekurzió az $e^{-\lambda_j t}$ függvények együtthatóira. Az a_{ij} mátrixot eddig $i = 2$ -ig ismerjük konkrétan:

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = N_{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}$$

Az NiRF már a 2. sorra is működik, csak $a_{11} = N_{10}$ -t kell feltételezni.

Végezzük el a rekurziót az $i = 3$ esetre. Az NiRF szerint:

$$\begin{aligned} a_{31} &= a_{21} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} & a_{32} &= a_{22} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \\ K_3 = a_{33} &= -(a_{31} + a_{32}) = -\frac{N_{10} \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} - \frac{N_{10} \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) \frac{N_{10} \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \frac{N_{10} \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \frac{N_{10} \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \end{aligned}$$

Eddig azt látjuk, hogy $i = 2, 3$ -ra és $j = 1, \dots, i$ -re igaz az a_{ij} együtthatókra: α) a számlálóban N_{10} mellett az első $i - 1$ bomlási állandó szorzata szerepel, β) a nevezőben $i - 1$ darab különbség szorzata van, ahol mindig az j . bomlási állandót vonjuk ki a többi bomlási állandóból, kihagyva a saját magából történő kivonás esetét. Ez $i = 2$ -re is fennáll (lásd \underline{a}_2 második sorát), és most $i = 3$ -ra is láttuk.

Az NiRF rekurziós formula pont olyan, hogy a számlálót λ_i -vel szorozza, így α) tulajdonság fennmarad az a_{ij} -re, ha $a_{i-1,j}$ -re fennállt. A nevezőt $(\lambda_i - \lambda_j)$ -vel szorozza ezért β) is fennmarad a_{ij} -re, ha $a_{i-1,j}$ -re fennállt, egészen $j = 1, \dots, i - 1$ -ig. Emiatt $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,i-1}$ -re is ugyanaz a konstrukció áll fenn, amit az α) és β) tulajdonságok szabnak meg.

Az $a_{ii} = K_i$ együtthatók esetét külön kell vizsgálni, hiszen ez a kezdeti feltételekből jön. Ezt a következő alfejeztben tárgyaljuk, de a konstrukció erre is fenn fog maradni. Ezért minden a_{ij} -re ($i > 1, j = 1, \dots, i$) igaz:

$$a_{ij} = \frac{N_{10} \prod_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)}$$

Ebből NiÁA felhasználásával kapjuk a végeredményt [NiIF] ($N_i(t)$ IdőFüggése), arra a kezdőfeltételre, amikor csak az első izotópból van N_{10} darab:

$$N_i(t) = \sum_{j=1}^i \frac{N_{10} \prod_{k=1}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)} e^{-\lambda_j t}$$

A radioaktív sor utolsó eleme egy adott stabil izotóp, ami nem bomlik. Ez legyen az $i = n$. eset. Az $N_n(t)$ időfüggést sokféleképpen felírhatjuk. Legegyszerűbb az atommagok összes számának megmaradását kihasználni. Ebből:

$$N_n(t) = N_{10} - \sum_{i=1}^{n-1} N_i(t)$$

Ezt a megoldást Harry Bateman már 1910-ben megadta. (Az atommag létezését még nem ismerték akkor, de az exponenciális bomlástörvény kísérletileg is már meg volt alapozva.) [klikk]

A radioaktív sor teljes aktivitását is kiszámolhatjuk ebből.

$$A_{tot} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i N_i(t) = N_{10} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i \frac{\prod_{k=1}^i \lambda_k}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)} e^{-\lambda_j t}$$

8.4. Az $a_{ii} = K_i$ együtthatók kiszámolása. (matematikai kiegészítés 3.)

Láttuk, hogy az $i > 1$ -re fennálló $N_i(0) = 0$ kezdeti feltételből az következik [NiKF]:

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} = a_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = 0.$$

Az előző alfejezetben megfogalmazott állításunk az, hogy az a_{ij} konstrukciója a_{ii} -nél is fennáll, azaz a bizonyítandó állítás:

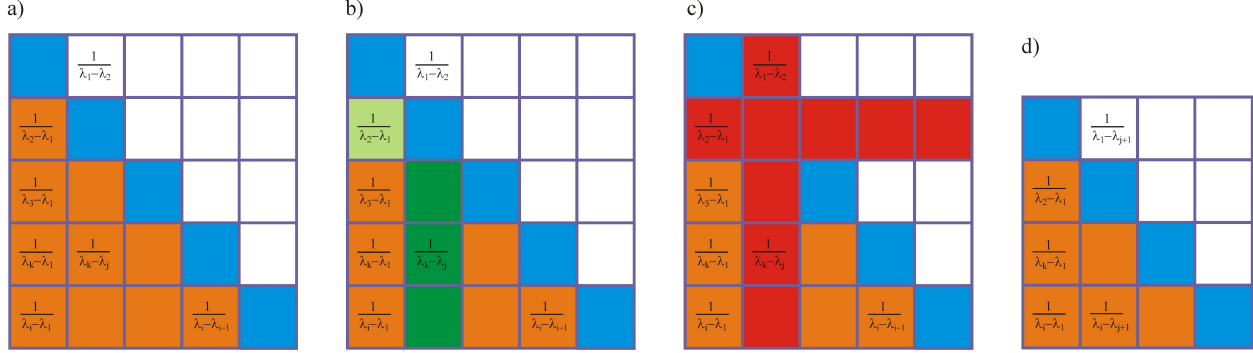
$$a_{ii} = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\prod_{k=1, k \neq i}^i (\lambda_k - \lambda_i)} = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\prod_{k=1}^{i-1} (\lambda_k - \lambda_i)}$$

Ez akkor, és csak akkor áll fenn, ha

$$N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\prod_{k=1}^{i-1} (\lambda_k - \lambda_i)} + N_{10} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)} = 0$$

Az i . tagot is tegyük be a szummába, akkor egy szimmetrikus felírását kapjuk a bizonyítandó állításunknak, és $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}$ -vel le is oszthatunk [SZBÁ]:

$$0 = \sum_{j=1}^i \frac{1}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)} = \sum_{j=1}^i \Lambda_j$$



1. ábra. A b_{ij} mátrix szemléletesen.

Ezt kell már csak bizonyítanunk, ahol

$$\Lambda_j = \frac{1}{\prod_{k=1, k \neq j}^i (\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_{j-1} - \lambda_j)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \dots (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Amikor SZBÁ-ban összeadjuk a Λ_j -ket, akkor a nevezőkben minden k, j párhoz tartozó $\lambda_k - \lambda_j$ különbség szorzata benne lesz kétszer. Egyszer a Λ_k esetén $\lambda_j - \lambda_k$ -ként, tehát negatív előjellel, és egyszer a Λ_j -ben $\lambda_k - \lambda_j$ -ként, tehát pozitív előjellel. A közös nevezőbe csak azt tesszük bele, ami olyan $\lambda_k - \lambda_j$, ahol $k > j$. Ekkor a közös nevezőben $\binom{i}{2}$ darab tag lesz. Jelöljük a közös nevezőt V_i -nek, ami egy két indexre futó produktum lesz:

$$V_i = \prod_{k,j=1, k>j}^i (\lambda_k - \lambda_j)$$

Szemléletesen tudjuk vizsgálni a kérdést, ha bevezetjük a $b_{kj} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j}$ mátrixot. Ebben a mátrixban a főátló alatti elemek szorzatát hívjuk V_i -nek. Itt nagyobb a sorindex az oszlopindexnél (a főátló nincs benne). Az 1. ábra a) panele mutatja a b_{kj} mátrixon belül narancssárgával a V_i szorzat tényezőit.

A Λ_j szorzat a mátrix j . oszlopának elemeinek a szorzata, az 1. ábrán $j = 2$. Itt van az, hogy mindig a λ_j a kivonandó a nevezőben. Kérdés, hogy mi marad a számlálóban (W), amikor Λ_j -t közös nevezőre hozzuk?

$$\Lambda_j = \frac{W_j}{V_i}$$

Ezen szorzat tényezőinek főátló alatti elemei, az 1. ábra b) panelén a zölddel színezett négyzetek, benne vannak a közös nevezőben. Az oszlop főátló feletti tagok viszont nincsenek benne az a) panelen narancssárgával színezett közös nevezőben. De viszont a transzponáltjuk igen, ezt jelöli a világoszöld terület (ezen egyszerűsített ábrán ez csak 1 négyzet). A Λ_j szorzat majdnem megegyezik a világos és sötétzöld négyzetekhez tartozó tényezők szorzatával, kivétel, hogy a transzponálásakor egy negatív előjel is bejön, hiszen b_{ij} antiszimmetrikus. Mindig $j - 1$ tényező esik a főátló fölé, ezért $\Lambda_j = (-1)^{j-1} \prod Z_k$, ahol Z_k a zöld négyzetekben (világos és sötét együtt) lévő tényezők szorzata. A számlálóba a közös nevező azon tényezői kerülnek, amelyek nincsenek a zöld területen. Ezek egy eggyel kisebb rendű mátrix főátló alatti elemei. A c) panelen a j . oszlopot és sort kihagyjuk, akkor pontosan a zöld négyzetek kerülnek ki a narancssárga részből, és marad az eggyel kisebb mátrix főátló alatti elemeinek szorzata. $W_j = V_{i-1}(j)$, ahol $V_{i-1}(j)$ azt jelenti, hogy a b_{kj} -ből a j . sor és oszlop elhagyásával előállított mátrix főátló alatti elemeinek a szorzata.

A V_i szorzat egy speciális mátrix determinánsa. Ennek neve Vandermonde determináns (klikk), ami $i \times i$ -es jelen esetben, i darab valós számból állítható elő, és első oszlopa csak 1-esekből áll, valamint az utolsó oszlopban az x_i -k $i - 1$. hatványai vannak. Teljes indukcióval itt látató bizonyítás alapján az következik,

hogy a determináns az x_1, x_2, \dots, x_i számok különbségeinek a szorzata, azaz pont az 1. ábrán a narancssárga terület.

$$V_i = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{i-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{i-1} \end{vmatrix} = \prod_{k,j=1, k>j}^i \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j}$$

Ezzel Λ_j -t is felírhatjuk determinánsokkal:

$$\Lambda_j = \frac{(-1)^{j-1} V_{i-1}(j)}{V_i} = \frac{(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{i-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{i-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{i-2} & \lambda_1^{i-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{i-2} & \lambda_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{i-2} & \lambda_i^{i-1} \end{vmatrix}}$$

Ebből adódóan a keresett $\sum_{j=1}^i \Lambda_j$:

$$\sum_{j=1}^i \Lambda_j = \frac{\sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} V_{i-1}(j)}{V_i}$$

Itt a számláló az alábbi determinánssal adható meg, a minusz előjelek pont a sakktábla szabály szerint alakulnak:

$$\sum_{j=0}^i W_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{i-2} \\ 1 & 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{i-2} \end{vmatrix}$$

Viszont ebben az első két oszlop azonos, ezért a determináns értéke 0. Ezzel bizonyítottuk, hogy $\sum_{j=1}^i \Lambda_j = 0$, amivel beláttuk az SZBÁ állítást. Ebből az következik, hogy a_{ii} feltételezett alakjával visszakaptuk a

$$0 = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1} \sum_{j=1}^i \Lambda_j = \sum_{j=1}^i a_{ij}$$

állítást. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $\sum_{j=1}^i \Lambda_j = 0$ -ból az következik, hogy

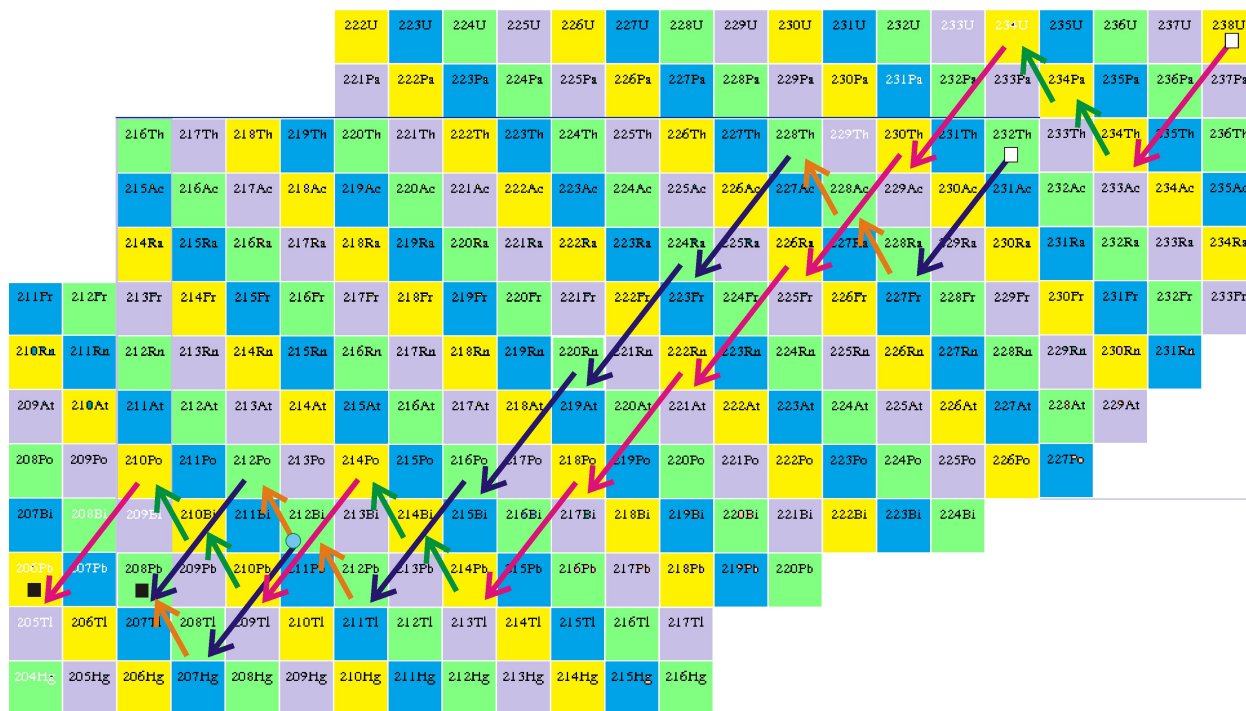
$$\Lambda_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \Lambda_j$$

És ezt bővítve:

$$a_{ii} = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = -N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \Lambda_j = N_{10} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1} \Lambda_i = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\prod_{k=1, k \neq i}^i (\lambda_k - \lambda_i)}$$

$$a_{ii} = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\prod_{k=1}^{i-1} (\lambda_k - \lambda_i)}$$

Ezzel az a_{ii} együttható értéke is megvan, és valóban ugyanazon konstrukció szerint épül fel, mint a többi a_{ij} .



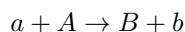
2. ábra. A két leggyakoribb radioaktív sor és a négy radioaktív család szemléltetése az izotóptérképen. A családok azonos színű átlós vonalakban helyezkednek el. A piros (α)-zöld (β) nyilak az uránsort mutatják, az uráncsalád legvalószínűbb, a természetben is megtalálható bomlási sorát. Látható, hogy ezek mindig sárga mezőkön haladnak keresztül. A kék (α) - sárga (β) nyilak a tóriumsort demonstrálják. Ezek mindig zöld kockákon haladnak keresztül. A világoskék kör a tóriumcsalád elágazási pontját mutatja.

9. Radioaktív családok

Radioaktív sorra van példa a természetben is. A ^{238}U például α -bomló izotóp, de a felezési ideje 4.4 milliárd év. A Föld életkora kb. 4,5 milliárd év, így kb. a fele megvan még az eredeti a mennyiségnek, ami ^{238}U -ból a Föld anyagának keletkezésekor megszületett. Bármilyen talajban vagy kőzetben találunk ^{238}U -t szerte a világon. A leányeleme a ^{234}Th β -bomló, annak a leányeleme is, és így jutunk a ^{234}U -hoz, aminek szintén hosszú a felezési ideje, 250 ezer év. Ez azért 4 nagyságrenddel kisebb felezési idő. 10 ezred része a Föld életkorának, geológiailag ez már egy rövid időszakot jelent csak. De elég hosszú ahhoz, hogy a 234-es uránt is megtaláljuk a környezeti mintákban. A ^{234}U is α -bomló, ^{230}Th keletkezik belőle, amiből ^{226}Ra , majd ^{222}Rn . A sor tovább folytatódik még

10. Indukált radioaktivitás

Amikor egy atommagreakció során keletkeznek radioaktív atommagok más, mondjuk stabil atommagokból, akkor beszélünk indukált radioaktivitásról. Leginkább reaktorban neutronokkal átalakított atommagokra lehet gondolni, vagy ciklotronokban felgyorsított protonok vagy alfa-részecskék segítségével is lehet új radioaktív elemeket létrehozni.



Ilyenkor a B atommagot hívjuk indukált atommagnak, és a darabszámukat N_I -vel jelöljük. Kezdetben nincs indukált atommag, $N_I(0) = 0$. Az indukált atommagok időfüggését megadó differenciálegyenletben a bomlási tag pontosan ugyanolyan, mint az eddigi radioaktív bomlások során. Azonban a keletkezési tag általában

egy időben állandó R reakciósebesség. Ez a magreakciók számának időbeli rátája, vagy sebessége, ennyi új atommag termelődik másodpercenként. $R = \dot{N}_r$. A hatáskeresztmetszet definíciós egyenlete alapján meg is tudjuk határozni az R -et: $R = \sigma j N_c$, ahol N_c a céltárgy magok számát jelöli. Általában a céltárgy nem szokott egy ilyen aktiváció során elfogyni, ezért az N_c csökkenésétől eltekintünk, de vegyük észre, hogyha fontos a céltárgy magok számának csökkenése, akkor erre is egy egyszerű bomlás típusú differenciálegyenlet érvényes, és a reakciósebesség is exponenciálisan csökken. Ekkor minden teljesen analóggá válik a soros bomlás egyenleteivel. De most a reakciósebességet állandónak tekintjük. A differenciálegyenlete:

$$\frac{dN_I}{dt} = -\lambda N_I + R$$

Ennek homogén megoldása a szokásos: $N(t) = Ae^{-\lambda t}$, az inhomogén tagot keressük a legegyszerűbb konstans formában: $N_{in}(t) = B$. Ezzel a differenciálegyenlet:

$$\frac{dN_{in}}{dt} = 0 = -\lambda N_{in} + R = -\lambda B + R \quad \rightarrow \quad B = \frac{R}{\lambda}$$

Ezzel és az $N_I(0) = 0$ kezdőfeltétellel: $N_I(0) = 0 = Ae^0 + \frac{R}{\lambda}$, ami miatt $A = -R/\lambda$. Ezzel a besugárzás során:

$$N_I(t) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})^1$$

Ha a besugárzás T ideig tart, és utána lévő $t > T$ időtartam során kérdezzük a felaktivált minta aktivitását, akkor az $A = \lambda N$ formula alapján:

$$A_I(t) = \lambda N_I(t) = R (1 - e^{-\lambda T}) e^{-\lambda(t-T)}$$

11. Ionizáló sugárzások elnyelődése anyagban

Most csak a semleges részecskék elnyelődését vizsgáljuk. Gamma-sugárzás vagy egy neutronfluxus árnyékoló anyagon történő áthaladására kell gondolni. Igazából ez a sugárzás és anyag kölcsönhatás sokkal bonyolultabb, mint ahogy most tárgyaljuk a másodlagos részecskék hatásai miatt. Ha csak az első kölcsönhatásokat tekintjük, akkor kapjuk vissza az alábbi formulákat.

Van a semleges részecskék árama, ami beérkezik merőlegesen egy x vastag árnyékoló lemezre, amit felosztunk sok dx rétegre. A beeső áramban I darab részecske halad másodpercenként. $I(x=0) = I_0 = \frac{dN}{dt}$. Vizsgáljuk dt ideig az egyik dx vastag réteget. Ezalatt itt $R \cdot dt$ darab magreakció történik, ezzel a kimenő részecskék száma ennyivel kevesebb lesz. (Feltettük, hogy elnyelődik a bejövő neutron, vagy ha fotonról van szó akkor fotoeffektus történt. Ha Compton-effektus is van, akkor jönnek a másodlagos reakciók és a bonyolultabb leírás, ami általában tényleg szükséges.) $\Delta N = -Rdt = -\sigma j N_c dt = -\sigma \frac{I}{A} N_c dt$. Akkor a bejövő dN részecske helyett csak $dN - Rdt$ megy tovább a következő rétegbe, ($N_c = \rho V = \rho A dx$):

$$I(x)dt = dN \quad \rightarrow \quad I(x+dx)dt = dN - \sigma \frac{I}{A} \rho A dx dt$$

Emiatt $I(x+dx) - I(x) = -\sigma \frac{I}{A} \rho A dx$, és ebből:

$$\frac{dI}{dx} = -\sigma \rho I \quad \rightarrow \quad I(x) = I_0 e^{-\sigma \rho x} = I_0 e^{-\mu x}$$

Itt ρ a céltárgy részecskeszám sűrűsége, és μ a tömegabszorpciós együttható.

¹Minusz előjel javítva 2020. június 6-án
szerző: Horváth Ákos, ELTE Atomfizikai Tanszék