

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Atomfizikai Tanszék

A nukleáris asztrofizikai r-folyamat fontosabb magreakcióinak vizsgálata

Szakedolgozat

Készítette:
Szücs Tamás

fizikus és fizika tanár szakos hallgató

Témavezető:

Dr. Horváth Ákos

ELTE TTK Atomfizikai Tanszék



Budapest, 2008

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Nukleoszintézis folyamatok csillagokban	5
2.1. A kozmikus elemgyakoriság	5
2.2. Izotópok keletkezésének áttekintése	5
2.3. A protonok fúziója csillagokban	7
2.4. Hélium fúzió a csillagokban	9
2.5. Magasabb rendű égési fázisok	10
2.6. A szupernóva robbanás	11
2.7. Az s-folyamat és az r-folyamat	13
2.8. Li, Be, B	15
3. Reakciójáló számítások különböző közelítésekben	17
3.1. Mire lesz szükség az r-folyamatban	17
3.2. A feladat definiálása differenciálegyenletek szintjén, és speciális egyszerűsítések lehetősége	18
3.2.1. Mit lehet analitikusan tudni?	19
3.2.2. Mit kell numerikusan számolni?	20
3.2.3. Milyen kísérleti adatok ismertek?	20
3.3. Neutronbefogásból és β^- bomlásból álló reakciójalók megoldása MAPLE-val, és azok összehasonlítása a numerikus megoldással	22
3.3.1. A numerikus szimuláció	22
3.3.2. Φ =áll., elemek = csak vas	22
3.3.3. Φ =áll., elemek = Fe, Co	24
3.3.4. Φ =áll., elemek = Fe, Co , Ni	26
3.3.5. Φ =exponenciális-lecsengés, elemek = Fe, Co Ni	29
3.3.6. A konvergencia tesztelése	30
3.4. Megoldások az irodalmi adatokkal	32
3.4.1. Tipikus időfüggések	32
3.4.2. A β -bomlások számának neutronsűrűség-függése	34

3.4.3.	A β -bomlások számának hőmérséklet-függése	37
3.4.4.	A legvalószínűbb elágazási pont meghatározása	40
3.4.5.	A neutronsűrűség időbeli változásának hatása	41
4.	Összefoglalás	46
5.	A csillagfejlődés tanítása a középiskolában	48
5.1.	A téma elhelyezése a tananyagban	48
5.2.	Csillagfejlődés tanóra kidolgozása a 11. osztályos fizikaórán . .	49
5.2.1.	Óravázlat	49
5.2.2.	Elméleti háttér a tanórához	50
5.2.3.	Feladatsorok a tanórai foglalkozáshoz	56
5.2.4.	A tanórán bemutatatható kísérlet	56
5.2.5.	A feladatok vázlatos megoldása, és kiegészítő megjegyzések a tanároknak	58
5.3.	Szakköri foglalkozás tervezése a Csillagfejlődés témában	60
5.3.1.	Kiegészítő tananyag a szakköri foglalkozáshoz	60
5.3.2.	Feladatsorok a szakköri foglalkozáshoz	61
5.3.3.	A feladatok vázlatos megoldása, és kiegészítő megjegyzések a tanároknak	62
5.4.	Szakköri foglalkozás tervezése szupernova-robbanás témában .	63
6.	Függelék	66
6.1.	Maxwell-Boltzman eloszlások tulajdonságai	66
6.2.	A reakcióhálóban használt paraméterek	67

1. Bevezetés

A nukleáris asztrofizika (vagy (atom)mag asztrofizika) napjainkban egyre nagyobb szerephez jut. Ez a magfizikának, egy a múlt század elején kialakult ága, legfőbb célja az asztrofizikai jelentőségű magfolyamatok (részecske reakciók, bomlások) vizsgálata. Ezeknek a folyamatoknak a tanulmányozásával megérthetjük a csillagok működését, sok égi jelenségre magyarázatot kaphatunk, és végül megválaszolhatjuk a kérdést; honnan származik a Naprendszerünk anyaga, beleértve a bolygónkat és saját testünket alkotó kémiai elemeket.

A kérdések megválaszolása közben ez a tudományterület a fizikának sok részterületét összekapcsolja. Például foglalkozik a neutron csillagok belsőjében esetlegesen kialakuló kvark-gluon-plazmával és maganyag állapotegyenletének kutatásával, ezzel szorosan kapcsolódik a nehézion ütközéseket vizsgáló nagy- és közepes-energiás nehézion részecske-fizikához.

Szoros kapcsolatban áll a neutrínó fizikával, ami a részecskefizikának egy elég kiterjedt ága. A neutrínók a gyenge kölcsönhatásban vesznek részt, így kísérleti vizsgálatuk rengeteg nehézséget vet fel, viszont fizikai tulajdonságaik alapvetően befolyásolják a térelméletek jóslatait. A nukleáris asztrofizika a Nap-neutrínóspektrumának meghatározásával, és szupernóvákból érkező neutrínók vizsgálatával járul hozzá a kutatásokhoz.

Végül az egyik fontos részterületét képezi a csillagokban folyó elemszintézis, és energiatermelés reakcióinak vizsgálata. A töltött-részecskés kísérleteket kisenergiás részecskegyorsítókkal végzik.

Jelen dolgozatban neutronbefogási reakciók egy csoportját vizsgáljuk. Ezek nagy neutronfluxus mellett gyors egymást követő befogások láncolata. A befogások gyakorisága miatt nevezik a folyamatot r-folyamatnak (az angol rapid szóból). Ekkora neutronfluxus, jelenlegi tudásunk szerint, csak egy szupernóva robbanás környezetében alakulhat ki, ezért jelentősek ezek a befogások az asztrofizika számára is. Ezenfelül, mint ahogy az a dolgozat későbbi részében részletezzük, ez a folyamat a felelős a ^{209}Bi -nél nehezebb izotópok előállításáért, ezzel az összes jelenleg nukleáris fűtőanyagként

használt hosszú felezési idejű izotóp létrehozásáért, tehát érdemes tudnunk a keletkezésük körülményeit.

A dolgozat összefoglalja az elemek keletkezéséről eddig megszerzett magfizikai tudást, és részletesebben kitér, a nehéz elemek szintézisére. Ezután bemutat egy saját készítésű reakcióháló megoldó programot, ami különböző paraméterek (hőmérséklet, neutronsűrűség, a neutronok jelenlétének időtartama) mellett megadja a vas izotópok számának időbeli fejlődését.

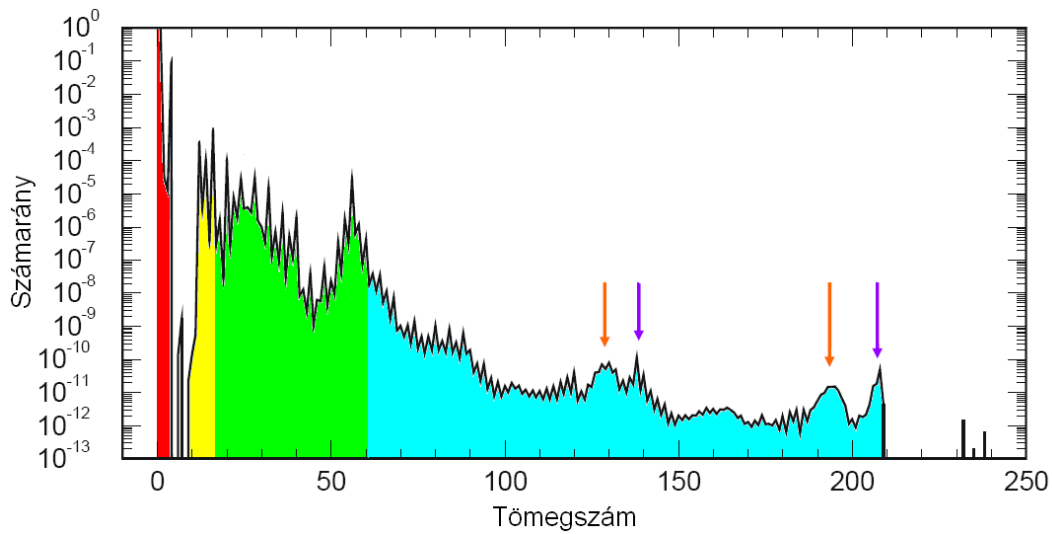
2. Nukleoszintézis folyamatok csillagokban

2.1. A kozmikus elemgyakoriság

A naprendszerben több mérés eredményének összetételeként megfigyelt izotóp-gyakoriság az 1. ábrán látható. Az eloszlást legelőször a ritka úgynevezett CI1 típusú meteoritok összetételének méréséből Goldschmidt [1] határozta meg. Ezek a meteoritok őrzik legjobban a természetes izotóp-gyakoriságot. Később ezt az eloszlást pontosították a Nap fotoszférájának spektroszkópiai mérése alapján. A görbe jellegzetes tulajdonságokkal rendelkezik, ezek közül az egyik az exponenciális csökkenés. Ezt már a korai publikációkban is megemlítik [2]. Gamow és munkatársai arra mutatnak rá, hogy egy exponenciális függvénnyel illeszthető ez az eloszlás. Ez görbe legfőbb menetét jól leírja, viszont nem ad számot a csúcsokról. A legszembetűnőbb széles csúcs a vas körül látható. Az ennél magasabb tömegszámú elemek tartományában a csökkenés, sokkal lassabb, mint az 56-os tömegszámnál könnyebb elemekre. A vasnál nehezebb elemek tartományban még egy jellegzetes kettős csúcs szerkezetet is megfigyelhetünk. (Az 1. ábrán ezeket jelölik a nyilak.) Alaposabban megnézve az eloszlást megfigyelhetjük, hogy a páros tömegszámúakból mindig több van, mint a páratlanokból. Ez az egyik legszembetűnőbb bizonyítéka a magfizikai eredetnek, ugyanis tudjuk, hogy a páros nukleonszámú magok általában kötöttebbek a páratlanoknál. A nehéz elemek kettős csúcs szerkezete pedig a héjlezárodásokkal hozható kapcsolatba.

2.2. Izotópok keletkezésének áttekintése

A hidrogén és a hélium egy részének kivételével az izotópok a csillagok különböző fejlődési fázisaiban jöttek létre. A korábban említett két elemet az ősrobbanás hozta létre. Az ősrobbanás után 76% a hidrogén és 24% a hélium tömegaránya az univerzumban. (Illetve még keletkezett egy kevés ${}^7\text{Li}$ is, de annak tömegaránya csupán 10^{-3} %). Ezekből alakult ki a többi elem,



1. ábra. A különböző tömegszámú izotópok gyakorisága a naprendszerben a csillagok közreműködésével.

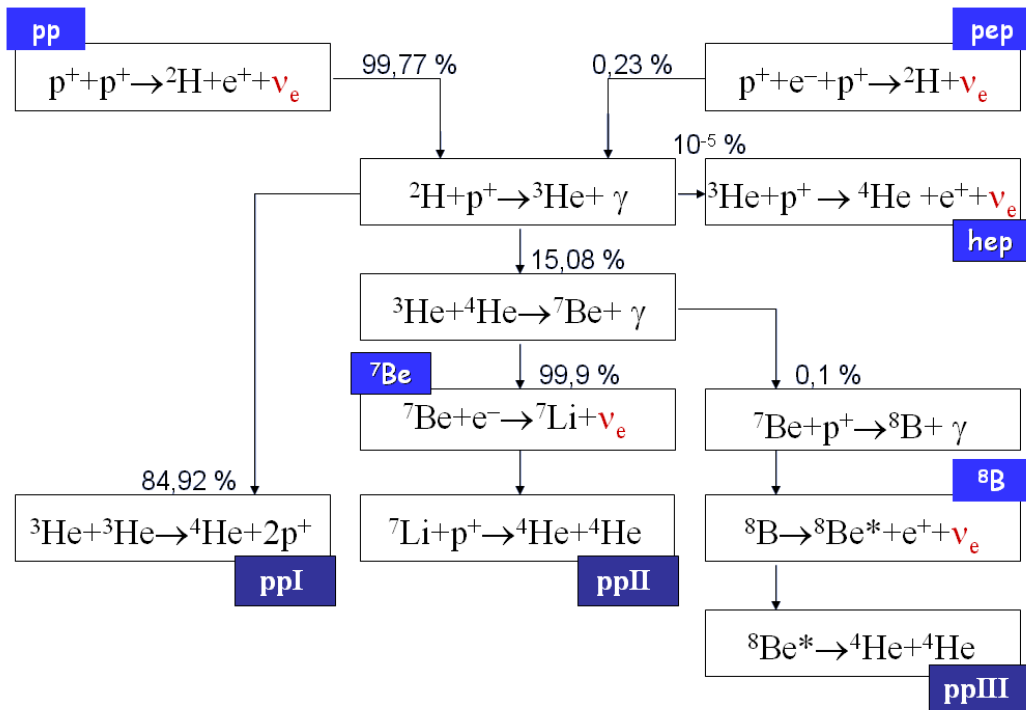
A csillagfejlődés kezdeti szakaszában, az ősrobbanásban keletkezett gázköd a gravitáció hatására összehúzódik. Az összehúzódás közben felszabaduló gravitációs energia megnöveli az egyes atomok kinetikus energiáját, ezzel a gázfelhő hőmérsékletét. Mikor a csillag központja elérte azt a hőmérsékletet, hogy a protonok Coulomb tasztítása már ne tudja megakadályoznia a fúziót, az egyesülési folyamat beindul. A reakció közben energia szabadul fel, aminek nagy része fotonok formájában távozik. Ezeknek a fotonoknak a sugárnyomása megakadályozza a további összehúzódást, ezzel a csillag egy stacionárius állapotba kerül. A csillag élete és az elemszintézis ilyen stacionárius állapotokon keresztül zajlik. Mikor az aktuális "üzemanyag" (a fúzióban résztvevő elem) elfogy, vagy megritkul a sugárnyomás lecsökken, ezzel újabb összehúzódásnak engedve utat. Az összehúzódás ismét növeli a hőmérsékletet, ezzel nagyobb rendszámú magok fúzióját teszi lehetővé. A fúzióban résztvevő elemek rendszáma idővel monoton nő, viszont a felszabaduló fotonok összimpulzusa nem, így az egymást követő stacionárius állapotokban minél nagyobb rendszámú elemek vesznek részt a fúzióban, annál kisebb térfogatra húzódnak össze.

2.3. A protonok fúziója csillagokban

Ebben a fejezetben az 1. ábrán pirossal jelzett tartományát vesszük szemügyre, a protonok egymással való reakcióit. A reakciók végállapota mindegyik esetben a ${}^4\text{He}$, de ehhez sokféle út vezet. A lehetséges reakció útvonalát a 2. és a 3. ábra tartalmazza. A szövegben zárójelben az egyes reakciókhoz az ábrákon található jelöléseket társítjuk.

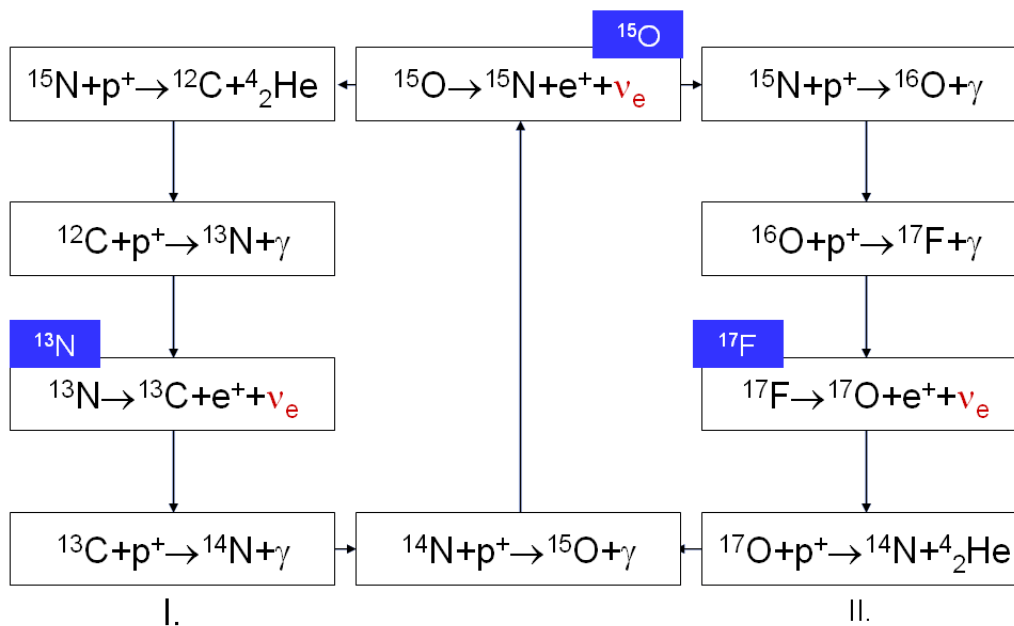
Két protonból álló mag (${}^2\text{He}$) nem alkot kötött rendszert, így az egyesülés után szét is esik. A magas hőmérsékletnek és sűrűségnek köszönhetően gyakoriak az ütközések, és így egy statisztikus egyensúly alakul ki a ${}^2\text{He}$ -k és a két-proton rendszer közt. A Napban ez a régió a mag, ami kb. a sugár egyötödéig tart, sűrűsége 150 g/cm^3 , és a hőmérséklete $13,5$ millió K. A lehetséges továbblépések közül az újabb proton befogása nem oldja meg a helyzetet, ugyanis a ${}^3\text{Li}$ szintén instabil. A valós megoldást Bethe és Critchfield mutatta meg [4]. A gyenge kölcsönhatás előidézheti a következő reakciót: $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$ (pp reakció). Mivel ezt a reakciót a gyenge kölcsönhatás vezérli, a hatáskeresztmetszete 20 nagyságrenddel kisebb, mint a magreakciókhoz rendelt. Ez a reakció a leglassabb a csillagfejlődés folyamán. Más gyenge folyamat is lehetséges, ami a két protonból deuteronra csínál. Ez a $p + p + e^- \rightarrow d + \nu$ (pep reakció). A Napunkban $0,23\%$ -ban ez a folyamat hozza létre a deuteronra. (A pp és a pep reakciók aránya a Fermi-féle arany szabályból kiszámítható.) Ezután a keletkező deuteron még egy proton befogásával ${}^3\text{He}$ -má alakul. Ez a mag kis valószínűséggel fog be újabb protont, mert abból csak a gyenge kölcsönhatás révén keletkezhet stabil rendszer (hep reakció). A legnagyobb valószínűségű lépés két ${}^3\text{He}$ egyesülése, amelyből ${}^4\text{He}$ keletkezik, két proton távozása közben (ppI reakció). Másik lehetőség a ${}^3\text{He}$ megsemmisülésére, hogy a már meglévő ${}^4\text{He}$ -gyel fuzionál. Ekkor ${}^7\text{Be}$ keletkezik, ami még egy proton befogás és az egyik proton neutronná alakulása után ${}^8\text{Be}$ -á alakul. Ez a mag instabil és két ${}^4\text{He}$ -é esik szét. Ha előbb következik be a proton neutronná válása, és utána a proton befogás akkor az átmeneti mag a ${}^7\text{Li}$ (ppII ág). Ennek az esetnek az érdekessége, hogy elektron befogással alakul át a mag, és nem β^+ bomlással,

mert a ${}^7\text{Be}$ és a ${}^7\text{Li}$ kötött állapot energia különbsége nem elég a proton és a neutron tömegkülönbségének valamint a e^+ tömegének létrehozásához. Ha fordított az átalakulás sorrendje, akkor a ${}^8\text{B}$ az átmeneti mag (ppIII ág). Elméletben ennél sokkal több lehetséges reakcióban vehetnének részt a szóban forgó magok, de az átmeneti részecskék kis sűrűsége miatt csak ezek a folyamatok játszódhatnak le.



2. ábra. A protonfúzió csillagokban nehezebb elemek jelenléte nélkül.

Az elsőgenerációs csillagokban, amikben az ősrobbanás hidrogénjén és héliumán kívül kezdetben nincs nehezebb elem, csak a fent leírt módon egyesülhetnek a protonok. Viszont olyan csillagokban, amikbe korábban kihunyt csillagok maradványai is bekerültek, a nehezebb elemek részvételével más módon is létrejöhet a protonok fúziója. Ezek az úgynevezett CNO ciklusok (a 3. ábrán kétféle cno ciklust ábrázolunk). A nevüket a bennük szereplő átmeneti elemekről kapták. Az a csillag hőmérsékletétől függ, hogy melyik a domináns.



3. ábra. A CNO ciklus

2.4. Hélium fúzió a csillagokban

Ebben a fejezetben az 1. ábrán sárgával jelzett tartomány izotópjainak kialakulását tárgyaljuk. Ezek legtöbbször α reakció, ami a gyakoriságban is látszik, minden négyel osztható tömegszámú izotóp gyakorisága nagyobb a körülötte lévőknél.

A csillag tömegétől függő idő múlva a fúzió helyén hidrogén sűrűsége lecsökken, megszűnik a reakció és vele a sugárnyomás is. A csillag összehúzódik, és addig melegszik, míg beindulhat a következő rendszámú elem (esetünkben a ^4He) fúziója. A $p + ^4\text{He}$ reakció nem megy végbe, mivel nincs stabil 5-ös tömegszámú mag, másrészt pedig a protonok eddigre már kicsi a koncentrációja. Két héliumból ^8Be keletkezik, ami nem stabil, viszont éppen elég „hosszú” az életideje (10^{-16}s), hogy kialakuljon belőle egy statisztikus egyensúlyi mennyiség. Ezt a számot a két α részecske egymásmellette való elhaladásához (10^{-19}s) érdemes hasonlítani. Ezután a ^8Be -ből még egy α -részecske befogásával kialakul a már stabil ^{12}C . A 8-as tömegszám instabil

voltát az izotóp-gyakoriság is megmutatja, a 4-es és a 12-es tömegszám között sok nagyságrenddel lecsökken a gyakoriság. (ld. 1. ábra) A ^{12}C kialakulását 3α reakciónak nevezik. Fred Hoyle az 1950-es évek elején megállapította, hogy ez a reakció csak akkor tud ekkora gyakoriságban ^{12}C -t előállítani, ha rezonáns [3]. Ez azt jelenti, hogy a ^{12}C -nek létezik egy kb. akkora energiájú gerjesztett állapota, mint amekkora a szén és a $^4\text{He} + ^8\text{Be}$ rendszer kötési energiáinak különbsége, illetve ha a kettő nem is egyezik teljesen, a hőmozgásból származó energia pótolni tudja a hiányt. Mindez nagyságrendekkel megnöveli a hatáskeresztmetszetet. Nem sokkal ezután kísérletileg is megtalálták a ^{12}C 7,65 MeV-es gerjesztett állapotát. Ez az a rezonancia, amin keresztül a 3α folyamat zajlik. Itt bizonyosodott be legelőször, hogy mennyire fontos az atommagok szerkezete a csillagok működése, és az elemek kialakulása szempontjából.

Ezután a további könnyű elemek általában α -befogásos reakciókkal alakulnak ki, mivel túlnyomó részben hélium magok találhatók a csillag középpontjában, ahol a reakciók zajlanak, és itt már a protonok kifogytak. Legnagyobb számban az ^{16}O és a ^{20}Ne alakul ki. Viszont nem csak (α, γ) , hanem (α, n) (α, p) reakciók is végbe mennek, így alakul ki a közttes elemek egy része.

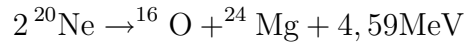
Ha a csillag tömege kisebb mint kilenc Naptömeg (M_{\odot}), akkor a hélium égés közben elveszíti a külső burkait. (A csillagfejlődésről szóló szakirodalomban égésnek nevezik a fúziós reakciókat, mikor két azonos mag reagál, de előfordul, hogy a proton vagy α befogásos reakciókat is égésnek nevezik.) A sugárnyomás először felfújja a külső héjakat, és végül lelöki a gravitációsan kevésbé kötött atomokat. A visszamaradó rész a hélium fúziójának befejezése után fehér törpe állapotba kerül.

2.5. Magasabb rendű égési fázisok

Az 1. ábrán zölddel jelzett tartomány izotópjainak kialakulásáról esik szó ebben a fejezetben, tehát körülbelül az 56-os tömegszámú izotópig.

Ha a csillag tömege kb. kilencszerese a mi Napunkénak, akkor további

égési fázisok is bekövetkeznek [6]. Eddig α -befogásos reakciókkal legnagyobb részben kialakul a ^{12}C , az ^{16}O és a ^{20}Ne . Először ^{12}C direkt fúziója következik be amihez 600–700 millió kelvin és 10^5 – 10^6 g/cm³ sűrűsége van szükség. A folyamat legnagyobb részt ^{24}Mg -t és ^{20}Ne -t állít elő. Ezt a reakciót nem az ^{16}O fúziója követi, hanem a neon reakciói. Ekkor $T_9 \sim 1,3$ – $1,7$ és $\rho = 10^6$ g/cm³. (Egyszerűsített jelölésként a következőkben T_9 -t használjuk. Ez egy dimenziótlan szám, ami egyenlő a kelvinben mért hőmérséklet osztva 10^9K -el.) A ^{20}Ne és az ^{16}O a (α, γ) és (γ, α) reakciók egyensúlyba kerülése miatt hasonló számban vannak jelen. Viszont a keletkező α -t a neon is befoghatja, ezzel ^{24}Mg -t hozva létre. Így a reakcióháló végső hatása:



Ezt követi az ^{16}O fúziója, aminek végtermékei ^{32}S és ^{28}Si , mindez $T_9 \sim 2$ és $\rho = 10^7$ g/cm³ mellett.

Végül $T_9 \sim 3$ – 4 és $\rho = 10^9$ g/cm³ mellett bekövetkezik az úgynevezett szilikon-égés. A ^{28}Si már nem tud önmagával fuzionálni a túl magas Coulomb gát miatt. A magas hőmérséklet és a gyakori ütközések feltörik a magok egy részét. A „törmelék” befogja a többi mag, és végül kialakul a legkötöttebb nukleon rendszer a ^{56}Fe , és a környékén található magok. Ennél nehezebb magok, már statikus csillagbeli égés során nem keletkeznek, mert a létrejöttük nem jár energia felszabadulással.

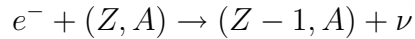
2.6. A szupernóva robbanás

A vasnál nehezebb elemek egy része szupernóva robbanás során jön létre. Nem minden szupernóva képes a nehéz elemek szintézisére, csak az úgynevezett összeroppanó magú (angol neve: core-collapse) szupernóvák. Egy ilyen robbanás részleteit veszi szemügyre részletesebben a következő fejezet.

A körülbelül $15M_{\odot}$ csillag amikor elérte, hogy benne az elemek a vasig fuzionáltak, hagymahéj szerkezetet mutat. Legbelül egy Fe-Ni magja van, amit Si, O, Ne, C, He, H burok vesz körül. Ezek a burkok önmagukban konvektívek, de egymás közt nem keverednek. Ez az úgynevezett preszupernóva

állapot [7].

A szupernova robbanás előtt, a csillag magjában a sugárnyomás már nem elég, hogy ellen tartson a gravitáció összehúzó erejének. Az összehúzó hatás közben kialakuló degenerált elektrongáz nyomása viszont egy ideig elég, hogy stabilizálja a magot. Amint a mag túllép egy kritikus tömeget (Chandrasekhar-tömeg = $1,4M_{\odot}$) az elektrongáz már nem képes ellen tartani a gravitáció összehúzó erejének, és a csillag magja összeroppan. Az egyre zsugorodó mag hőmérséklete, és így a fotonok száma megnövekszik. Ekkor az erős és elektromágneses reakciók egyensúlyba kerülnek az inverzükkel, ebből pedig az következik, hogy nem csak létrejön a ^{56}Fe , hanem egy részük feltörik, protonokat, neutronokat α -részecskéket, és egyéb fragmentumokat kialakítva. Ez a folyamat energiát von el a törzstől, így az összeroppanás gyorsul. A Pauli-elv sérülésének elkerülése miatt az elektrongáz degenerációját csökkenteni kell. Ezt az elektronok protonokba történő befogása oldja meg.



A neutrínók szintén energiát visznek el a törzsből, ezzel tovább növelve az összeomlás sebességét.

Mikor a sűrűség eléri a körülbelül $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ értéket (az összeroppanás kezdetétől számított 0,1 s múlva), a törzs átlátszatlanná válik a neutrínók számára is. A csapdázott neutrínógáz megakadályozza az összes proton neutronná alakulását. Az összeroppanás addig tart míg a központi rész el nem éri a maganyag sűrűségének 2-4-szeresét. ($\rho_{\text{maganyag}} = 2 \times 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) Ekkor a mag belső régiója összenyomhatatlanná válik. Az összeomlás lefékeződik, majd visszalökődik, és a bezuhanó részek visszapattannak róla. Ezzel egy kifelé haladó lökeshullám indul útjára. A lökeshullám a mag külső részén áthaladva a maradék Fe és Ni atommagokat is disszociálja, ezzel veszít az energiájából. Előfordul, hogy ez a prompt lökeshullám el sem éri a mag felszínét, ahol a szilícium égés zajlik. A lökeshullám újra indításához kellenek a korábban becsapdázott neutrínók, amik újra indítják az ezután már késleltetett lökeshullámot [8]. Végül ez a lökeshullám miután kijutott a csillag magjából, keresztülhalad a külső burkokon, és felmelegíti őket. A

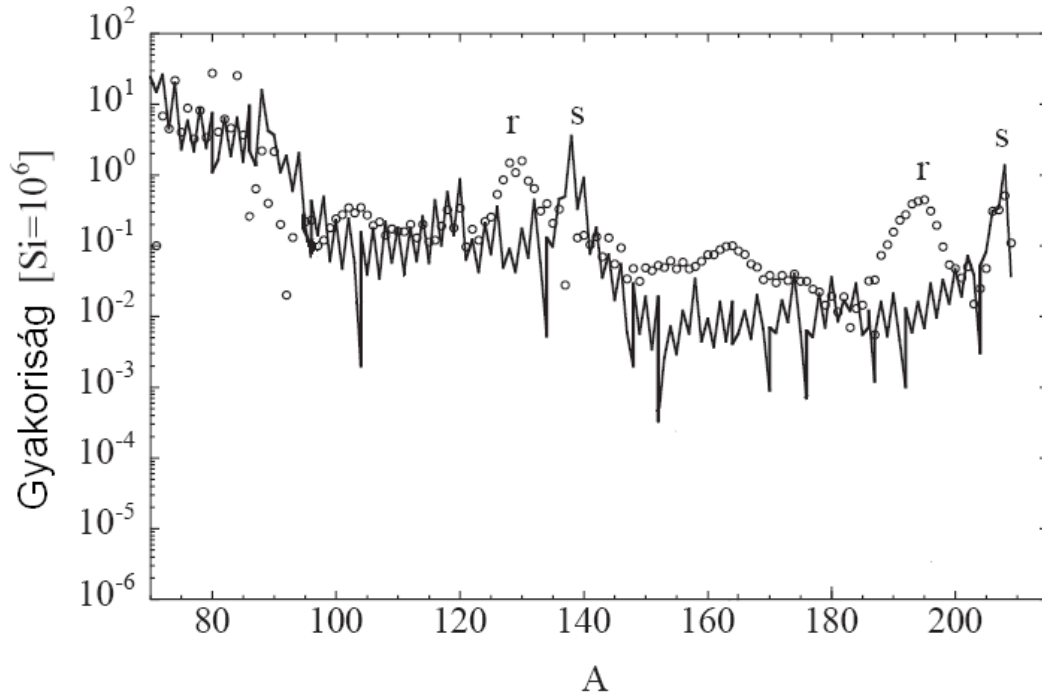
lökéshullám a kialakulásától számított kb. 10-100 s alatt áthalad az összes külső burkon. Amikor egy burok hőmérséklete eléri a staikus égéskor fennálló hőmérsékletet, az magfúzió ismét beindul. A fúzió addig tart, míg a lökéshullám áthaladása után a táguló burok hőmérséklete le nem csökken. Ekkor a reakciók megállnak, és a külső burkok szabadon tágulnak tovább, míg a legbelsőket továbbra is gravitációsan kötöttek maradnak, így ezek visszazuhannak a magból kialakult neutroncsillag felszínére.

2.7. Az s-folyamat és az r-folyamat

Mindeddig csak a vasnál könnyebb elemek kialakulásáról volt szó. A vas utáni elemek (ld. 1. ábra kék tartomány, illetve azon túl) szintézise energia befektetést igényel. A gyakoriság eloszlásból látszik, hogy ezeket már nem töltött részecske reakciók hozták létre, mert akkor sokkal meredekebben kellene csökkennie a gyakoriságnak, hiszen az egyre nagyobb rendszámú magok egyre nagyobb Coulomb taszítást fejtenek ki egymásra. A lehetséges út, ami ezeket a magokat létrehozta, neutron befogási reakciók. A neutronfluxus nagyságától függően kétféle reakcióút lehetséges. Ha kicsi a neutronsűrűség, akkor a stabilitási völgyben halad végig a reakció háló, ez az úgynevezett s-folyamat (az angol slow=lassú szó kezdőbetűjéből). Ez a folyamat a csillagok vörös óriás fázisában zajlik, ahol a reakciókhoz szükséges neutronokat az (α, n) (p, n) reakciók adják. A folyamat csak a ^{209}Bi -ig tart, mert a következő lépésben kialakuló ^{210}Bi β -bomlásából keletkező ^{210}Po spontán α -bomló, ezzel megakadályozza a további felépülést.

Ha nagy a neutronfluxus, akkor a β -bomló magoknak nincs idejük elbomlani, míg a következő neutron befogják, így ez a folyamat neutronban gazdag magokon keresztül zajlik. Ez az r-folyamat (az angol rapid=gyors szó kezdőbetűjéből). Ekkora neutronfluxus eddigi ismereteink szerint szupernóva robbanás során jön létre, a magban feltört Fe-Ni-ből, és az elektronok szabad protonokon történő befogása után. A kialakuló szabad neutronok követik a szupernóva robbanásban a burkokon áthaladó lökéshullámot. Általában csupán csak néhány másodpercig vannak jelen a befogódásuk előtt, viszont

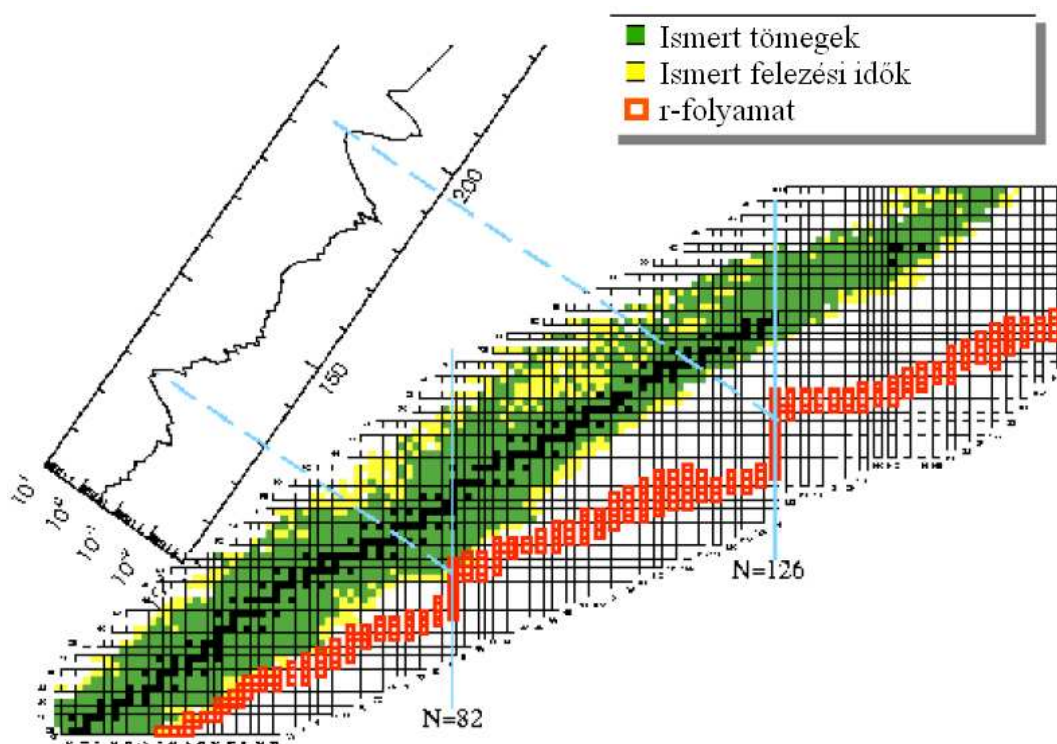
addig nagy sűrűségben. A neutrontöbbletes magok elkerülik, a spontán α -bomló magokat, ezzel felépülhetnek a Bi-nál nehezebb elemek is.



4. ábra. Az s- és r-folyamatban keletkező izotópok gyakorisága

Ezt a kétféle felépülési folyamatot mutatja a naprendszerbeli izotóp-gyakoriság kettős csúcs szerkezete (ld. 4. ábra), a vasnál nehezebb elemek esetén. A kettős csúcsok az úgynevezett mágikus számokhoz kapcsolhatók. Megfigyelések szerint mágikus számok esetében a mag sokkal kötöttebb, mint a körülötte lévők. Ezt a mag szerkezet héj modellje magyarázta meg, mégpedig azzal, hogy ugyanúgy mint az elektronszerkezetben, a magban is vannak bizonyos betöltöttségű héjak. Mágikus számnál történik meg egy héj lezáródása, ami azt jelenti, hogy a legkülső héj ekkor teljesen betöltött. (Hasonlóan a nemesgázok elektron szerkezetéhez) A párt alkotó csúcsok egyike az r- másika az s-folyamatból származik. Ezek a maghéjak lezáródási számai. Egy teljesen lezárt héjú mag stabilabb a környezetében lévőknél, és ha mágikus neutronszámmal rendelkezik, akkor nagyságrendekkel kisebb a neutron befogási hatáskeresztmetszete. Ez azt jelenti, hogy még nagy neutron fluxusban is

hamarabb bekövetkezik a β -bomlás, mint a következő neutron befogása. Ha bármelyik folyamat elér egy ilyen mágikus neutronszámot, akkor β -bomlások és neutron befogások felváltva követik egymást. Az s-folyamat mágikus neutronszámánál hoz létre csúcsot a gyakoriságokban, míg az r-folyamat ennél kisebb tömegszámnál, ugyanis a nagy neutrontöbbletetes magok esetén sokkal kisebb rendszámnál érik el a mágikus neutronszámot, majd innen bomlanak vissza a stabilitási völgybe, létrehozva a csúcsokat. (ld 5. ábra)



5. ábra. Az r-folyamatban útvonala, és a keletkező izotópok gyakorisága

2.8. Li, Be, B

Néhány elem keletkezéséről eddig nem esett szó, ezek a Lítium, Berillium és Bór. (1. ábrán a piros és a sárga terület közti rész). Ezeknek kötési energiája kisebb mint a csillagok statikus égési fázisában uralkodó hőmérséklet. Ha keletkeznek is könnyen megsemmisülnek például (p, γ) reakcióban, vagy egy-

szerűen ütközés közben szétesnek. Egy kevés ${}^7\text{Li}$ kivételével az ősrobbanás sem lehet a forrásuk, hasonló okok miatt.

Megfigyelték, hogy a csillagközi térben ezeknek a könnyű elemeknek a gyakorisága több nagyságrenddel nagyobb (10^6 szoros), mint a Naprendszerben. Ennek magyarázata az elemek keletkezéséről szóló, már klasszikussá vált cikkben a hipotetikus I-folyamat [5]. A cikk abból indul ki, hogy alacsony sűrűségű és kis hőmérsékletű színhely kell a keletkezéshez, hogy azt ne kövesse megsemmisülés. Ezek szerint a Li, Be, B a csillagközi gázban, a nagyenergiás kozmikus részecskék okozta spalláció révén keletkezik. A folyamathoz szükséges nagyenergiás részecskéket a kozmikus sugárzásban meg is figyelték.

3. Reakcióháló számítások különböző közelítésekben

3.1. Mire lesz szükség az r-folyamatban

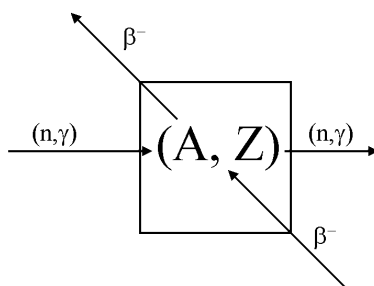
Az r-folyamat egy kellően nehéz, és sok résztvevős rendszer ezért nem lehetséges közelítés mentesen kezelni. Az irodalomban megtalálható számításokat mind feltételezések mellett végzik. Az egyik első szimuláció, ami nagyjából visszaadta a Naprendszerbeli izotóp eloszlást Woosley és társai munkája [9]. A későbbi publikációk nagy része ezt veszi alapul, és a számítógépek számítási kapacitásának növekedésével, egyre nagyobb reakcióháló kiszámolása vált lehetővé. Először a magok számát növelték az egyenletekben [10], és rájöttek, hogy a könnyű neutronban gazdag elemeknek is nagy szerepük van a végső gyakoriság-eloszlás kialakításában.

Mindez azt mutatja, hogy az egész háló kiszámításához komoly számítástechnikai háttérre van szükség, ezért egy teljes r-folyamat szimulációra nem is vállalkozunk. Célunk a reakciók egy kisebb részletének tanulmányozása különböző paraméterek mellett. Vizsgáljuk hogy különböző neutronsűrűségek mellett meddig jut el a folyamat, mielőtt a β -bomlás nagyobb rendszám felé fordítja. Meghatározzuk, hogy mennyi az a minimálisan szükséges neutronsűrűség ami mellett a folyamat túllép az ismert felezési idejű magokon. Emellett vizsgáljuk a rövid ideig tartó, különböző függvények szerint változó neutronsűrűség hatását is.

Mivel egyszerre több mag gyakoriságának időbeli fejlődését vizsgáljuk, ezért nehézségekbe ütközik a jó időbeli felbontás meghatározása. Sokszor fordul elő, hogy a háló elején lévő magok száma akár 42 nagyságrenddel kevesebbet változik mint a háló végén lévőké. A felbontás növelésével nő a program futási ideje, ezért nem lehet tetszőlegesen kicsi felbontást alkalmazni. A végeredmények pontosságát befolyásolja a felbontás, de mint a későbbiekben kiderül meghatározható egy optimum attól függően, hogy mekkora pontosságra törekszünk.

3.2. A feladat definiálása differenciálegyenletek szintjén, és speciális egyszerűsítések lehetősége

A feladat absztrakt matematikai szinten egy reakcióháló megoldása. Ebben az esetben a reakció háló egy differenciálegyenlet-rendszer. Minden egyes mag bizonyos valószínűséggel átalakul. A közelítés, amit a dolgozat folyamán végig alkalmazunk, hogy minden mag csak a két szomszédos maggá tud átalakulni. Az eggyel nagyobb tömegszámúvá egy neutron befogással, az eggyel nagyobb rendszámúvá β^- -bomlással. A fordított reakciókat nem vesszük figyelembe. Emellett minden mag két szomszédosból jöhet létre, az eggyel kisebb tömegszámúból neutron befogással, és az eggyel kisebb rendszámúból β^- -bomlással. A reakció hálóban az elemi folyamatot a 6. ábrán láthatjuk. (A nyilak elhelyezkedése a magok izotóp térképén elfoglalt helyének megfelelően.)



6. ábra. Elemi folyamat

Ekkor minden egyes mag időfejlődését a következő differenciálegyenlettel lehet leírni:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(N_{A,Z}) = & + \lambda_{A,Z-1} N_{A,Z-1} \\
 & + \Phi \sigma_{A-1,Z} N_{A-1,Z} \\
 & - \Phi \sigma_{A,Z} N_{A,Z} \\
 & - \lambda_{A,Z} N_{A,Z}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Itt $\lambda_{A,Z}$ az A tömegszámú, és Z rendszámú izotóp bomlási állandója. $\sigma_{A,Z}$ ugyanennek a magnak a neutron befogási hatáskeresztmetszete, ami energia

függő. Φ pedig a neutron fluxus.

A reakcióháló bemenő paraméterei:

- neutron fluxus (Φ)
- bomlási állandók (λ)
- neutron befogási hatáskeresztmetszetek (σ)
- Kezdeti elem eloszlás ($N_{A,Z}(0)$)

3.2.1. Mit lehet analitikusan tudni?

Az egyenleteket minden egyes résztvevő magra felírva egy elsőrendű differenciálegyenlet rendszert kapunk. Ez analitikusan megoldható, a rendszer alapmátrixának ($X(t)$) meghatározásával. Az

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad \text{ahol } A(t) \text{ az együttható mátrix} \quad (2)$$

egyenletrendszer megoldása $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltétellel. Az analitikus megoldás formálisan elég egyszerűnek tűnik, viszont természetesen nagyon bonyolult tud lenni, minél nagyobb rendszert akarunk leírni.

$$x(t) = X(t)c \quad \text{ahol} \quad c = X^{-1}(t_0)x_0 \quad (3)$$

Első közelítésben a paramétereket időben állandónak tekintve egy állandó együtthatós homogén elsőrendű differenciálegyenletre jutunk. Ennek egy alapmátrixa $X(t) = e^{At}$. Egyetlen probléma az egyenletek száma. Ha a mátrixot valamilyen matematikai programcsomaggal akarjuk meghatározni, akkor mátrix méretével folyamatosan nő a számolás ideje, de elvben megoldható.

Ha paraméterek időben nem állandóak, a rendszernek akkor is létezik egyértelmű megoldása, illetve alapmátrixa, de azt már nem lehet ilyen egyszerűen képletbe foglalni.

3.2.2. Mit kell numerikusan számolni?

Az előző alfejezet alapján úgy gondolhatjuk, hogy nincs is szükség numerikus számolásokra, hisz az egész problémának matematikailag bizonyítható módon létezik egyértelmű analitikus megoldása. (Itt megjegyeznénk, hogy ez a megoldás akkor is létezne, ha bármelyik mag bármelyik másikba átalakulhatna, tehát figyelembe vehetnénk az α -befogási reakciókat, vagy akár gyenge folyamatokat is.) Ez teljesen igaz, viszont az alapmátrix kiszámítása, mérete miatt, még formális logikát alkalmazó számítógépes munkával is rengeteg idő. Ezért alkalmazunk numerikus módszert is az időfejlődés pontról, pontra történő feltárásához. A numerikus, és a formális megoldást egyszerű rendszerekre párhuzamosan végezzük, ezzel összehasonlíthatjuk a megoldásaikat. A numerikus megoldáshoz Runge-Kutta metódust fogunk használni, ami előre meghatározott lépésközzel meghatározott idő intervallumban megmondja a függvények értékeit, a kezdeti feltétel ismeretében. Ezzel a teljes analitikus megoldás-függvényeket nem szükséges meghatározni, ami nagyban lecsökkenti a számolási időt, ráadásul szakaszosan is futtatható a számolás. Ezalatt azt értjük, hogy egy bizonyos időintervallumban után létrejövő izotóp gyakoriság eloszlás, a következő számolás kiinduló eloszlása lehet.

3.2.3. Milyen kísérleti adatok ismertek?

Korábban említettük, hogy milyen kísérletekből vagy elméletekből meghatározott bemeneti paraméterekre van szükségünk.

Az r-folyamathoz szükséges neutronfluxus és a neutronbefogási hatáskeresztmetszet helyett két másik mennyiséget érdemes használni. Ezek a neutronszűrőség ρ , és a termikus reakcióráta $\langle\sigma v\rangle$ (itt a $\langle\rangle$ jel s sebességekre vett átlagolást jelent). Az áttérésről bővebben az I. függelékben. Az áttérés, illetve ez a közelítés, azért szükséges, mert a reakció hatáskeresztmetszetek a résztvevő részecskék relatív sebességétől függenek. A minimálisan szükséges neutronszűrőség a β -bomlások felezési idejének ismeretében megbecsülhető, azt feltételezve, hogy az r-folyamat esetén a nagy neutronöbblétes magok, egészen a neutron elhagyási vonalig létrejönnek, és hogy a szupernóva rob-

banás ezen szakasza csupán néhány másodpercig tart. Ebből a neutronsűrűségnek legalább $3 \times 10^{20} \frac{db}{cm^3}$ -nek kell lennie.

A β -bomlási állandók konstans értékek, és táblázatokból még nagyon neutrontöbbletes magokra is megvannak. Az általunk használt bomlási állandókat a NuDat (**N**uclear structure & decay **D**ata) [11] adatbázisból vesszük.

A problémát a neutronbefogási hatáskeresztmetszetek okozzák. Ezeket kísérletileg csak a stabil elemekre határozták meg. Az összes többi magra jó esetben elméleti számolások állnak rendelkezésre. A másik probléma, hogy a befogási hatáskeresztmetszetek energiafüggők. Ez a függvény legtöbbször nem monoton, hanem rezonancia szerkezetet mutat. Egyik első feladatunk a reális számolásokhoz a reakcióráták megbecslése a szupernóva robbanás hőmérsékletén. Ehhez [12] adatait és táblázatait használjuk fel. Statisztikus modell alapján egy hét paraméteres függvénnyel illesztette a különböző magok hőmérsékletfüggő neutronbefogási reakció rátáit. Ezt a függvényt használjuk fel mi is a reakcióráták kiszámításához.

$$N_A \langle \sigma v \rangle = \exp \left(a_0 + a_1 T_9^{-1} + a_2 T_9^{-1/3} + a_3 T_9^{1/3} + a_4 T_9 + a_5 T_9^{5/3} + a_6 \ln T_9 \right)$$

A képletben szereplő T_9 a dimenziótlanított és leskálázott hőmérséklet, konkrétan $T_9 = \frac{T[K]}{10^9 K}$, N_A pedig az Avogadro-állandó

Az áthelyettesítésekkel a megoldandó reakcióháló elemi lépése a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(N_{A,Z}) = & + \lambda_{A,Z-1} N_{A,Z-1} \\ & + \varrho \langle \sigma v \rangle_{A-1,Z} N_{A-1,Z} \\ & - \varrho \langle \sigma v \rangle_{A,Z} N_{A,Z} \\ & - \lambda_{A,Z} N_{A,Z} \end{aligned} \quad (4)$$

Az egyenletekben szereplő $N_{A,Z}$ nem az összes mag száma, hanem a kezdeti összes mag darabszámával leskálázott mennyiség. Így az egyenletekben, és az időfejlődés közben csak egynél kisebb számok szerepelnek (A grafikonokon gyakoriság címszóval). Fontos még azt is hangsúlyozni, hogy feltételezzük az elegendően sok kiindulási elemszámot, ezzel a változásokat folytonos függvényeknek vehetjük, és nem kell csak diszkrét értékek közt mozgó lépcsőfüggvényeket alkalmaznunk.

3.3. Neutronbefogásból és β^- bomlásból álló reakcióháló megoldása MAPLE-val, és azok összehasonlítása a numerikus megoldással

A differenciálegyenlet-rendszert egyszerűbb esetekben megoldjuk a MAPLE nevű matematikai programcsomaggal. Az eredményül kapott egzakt függvényeket összehasonlíthatjuk, a szimuláció adta numerikus eredményekkel, ezzel ellenőrizhetjük a szimuláció helyességét. Első próbálkozásra a paraméterek egy olyan készletét használjuk, aminek semmi köze a majdani bomlási állandó, reakcióráta értékeihez. Egyszerűen a differenciálegyenlet-rendszer kétfajta megoldását, és azok egyezését láthatjuk be vele, illetve a megoldások általános jellemvonásait keressük.

3.3.1. A numerikus szimuláció

Az általam C# programnyelvben írt numerikus szimuláció Runge-Kutta metódust alkalmazva oldja meg a differenciál egyenlet rendszert. Ehhez három különböző bemeneti file-ból veszi be a szükséges paramétereket. Elsőként a kiindulási izotóp eloszlást, aztán a β -bomlási állandókat minden magra, végül a neutron befogási reakcióráta 7 paraméterét minden magra. Ezenkívül futtatás előtt bekéri a neutronsűrűség értékét, valamint kiválasztható a neutronsűrűség időbeli változásának függvénye, bemenő paraméter még a hőmérséklet (T_9). Ha ezek megvannak szükséges még a maximális idő, és az időbeli felbontást mint paramétert megadni. Kimenetként a program egy file-ba írja a vizsgált időpillanatokban az izotópok aktuális számát, ezenfelül későbbi továbblépést segítő kiírja egy szövegdobozba a legutolsó időpillanatbeli gyakoriság értékeket.

3.3.2. Φ =áll., elemek = csak vas, kezdeti feltétel: az első elem gyakorisága 1

Először állandó, egységnyi fluxust használunk az egyenletrendszerben. Három elem számának alakulását adjuk meg időben. Ha a paraméterek számértékeit

a valós kísérleti adatoknak állítanánk be, akkor ez az eset a robbanás kezdeti fázisát írná le, amikor a neutronfluxus keresztülsöpör a szupernóva magjának külső rétegén, ami lényegében ^{56}Fe -ből áll. A jelen paraméterek annyiban reálisak, hogy a $\lambda_1 = 0$ stabil magot jelent (pl. ^{56}Fe) de a következő két elem már nem stabil. A paraméterek értékei:

$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0.1$	$\lambda_3 = 0.2$
$\sigma_1 = 2$	$\sigma_2 = 1$	$\sigma_3 = 2$
$N_1(0) = 1$	$N_2(0) = 0$	$N_3(0) = 0$

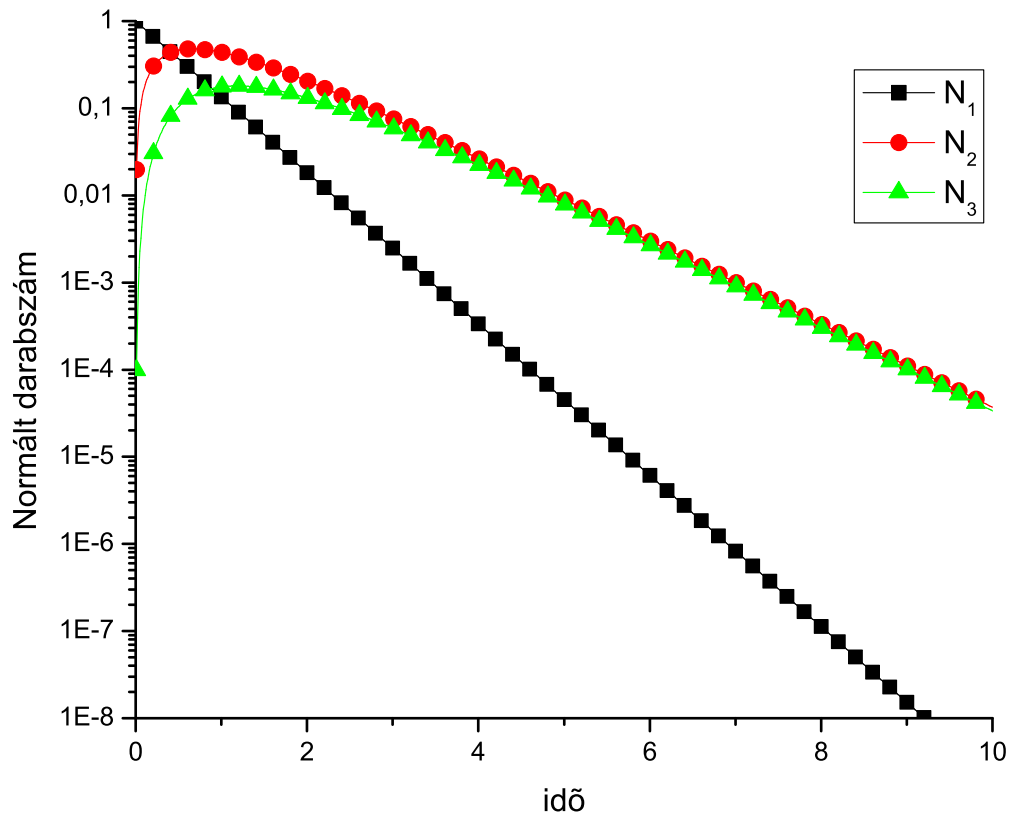
1. táblázat. Az első futtatás paraméterei, és a kiindulási elemek száma

A Maple megoldás:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= e^{-2t} \\
 N_2 &= -\frac{20}{9} e^{-2t} + \frac{20}{9} e^{-\frac{11}{10}t} \\
 N_3 &= -\frac{100}{9} e^{-2t} + \frac{200}{99} e^{-\frac{11}{10}t} + \frac{100}{11} e^{-\frac{11}{5}t}
 \end{aligned}$$

A 7. ábrán az izotópok gyakoriságának időbeli fejlődését ábrázoltuk. Ezeket a függvényeket meghatároztuk a Maple-let (folytonos vonal), a függvényértékeket minden ezred pontban kiszámoltuk, ezeken a pontokon keresztül húzunk a folytonos vonalat az ábrába. Az ábrán látható pontokat a numerikus számolás adja. A numerikus számolás felbontása egy század, de a grafikonon csak minden huszadik pontot ábrázoltuk, a jobb átláthatóság kedvéért.

A 7. ábrán azt látjuk, hogy a kiindulási izotóp exponenciálisan elfogy (logaritmikus skálán ez egy egyenes), a másik kettő pedig rövid idő alatt kialakul, majd ők is megsemmisülnek, de eltérő időállandóval, mint a kiindulási mag. (logaritmikus skálán más az egyenes meredeksége)



7. ábra. A Maple és a szimuláció megoldásának összehasonlítása az 1. esetben

3.3.3. Φ =áll., elemek = Fe, Co;

kezdeti feltétel: az első vas gyakorisága 1

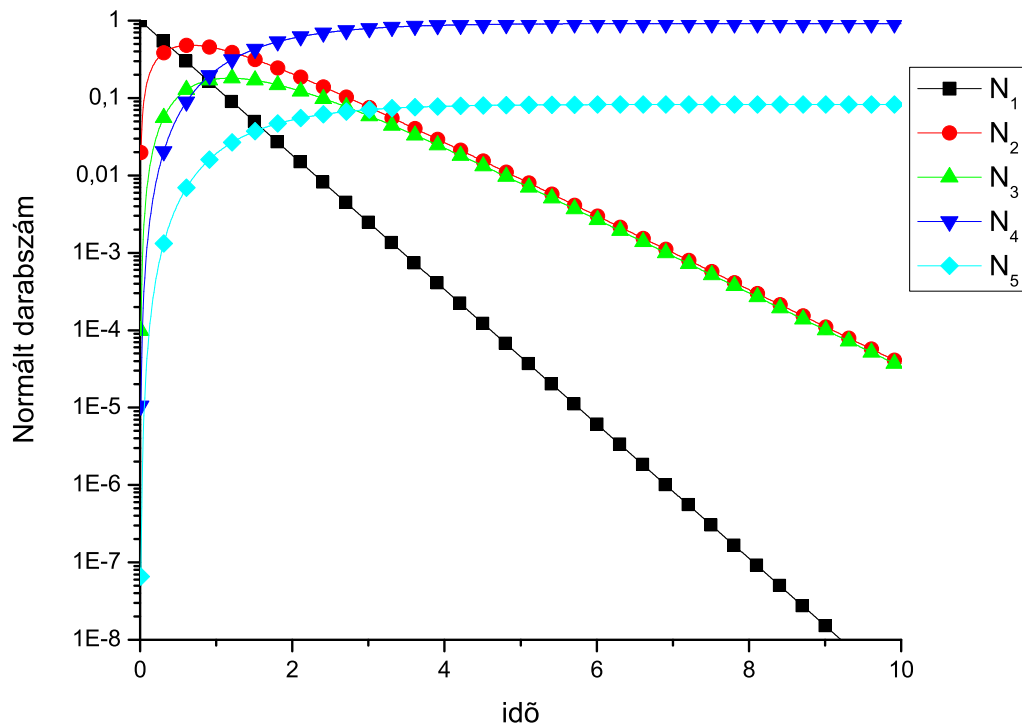
A fluxus továbbra is egységnyi és állandó. Most az eggyel nagyobb rendszámú három elem számának alakulását is megvizsgáljuk. Ezek azok, amik a β -bomlás után kialakulnak, de most még stabilnak tekintjük őket. A paraméterek ugyan azok mint az előző részben.

A Maple megoldás:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= e^{-2t} \\
 N_2 &= -\frac{20}{9} e^{-2t} + \frac{20}{9} e^{-\frac{11}{10}t} \\
 N_3 &= -\frac{100}{9} e^{-2t} + \frac{200}{99} e^{-\frac{11}{10}t} + \frac{100}{11} e^{-\frac{11}{5}t} \\
 N_4 &= \frac{101}{9} e^{-2t} - \frac{4220}{1089} e^{-\frac{11}{10}t} - \frac{1000}{121} e^{-\frac{11}{5}t} + \frac{111}{121} \\
 N_5 &= \frac{10}{9} e^{-2t} - \frac{400}{1089} e^{-\frac{11}{10}t} - \frac{100}{121} e^{-\frac{11}{5}t} + \frac{10}{121} \\
 N_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Megfigyelhetjük hogy $N_6 = 0$, ez azért alakult így, mert a forrásául szolgáló mag nem szerepel a reakció hálóban. Az egzakt megoldás és a numerikus számolás eredményének összehasonlítása itt is ugyanúgy történik, mint az előbb. A folytonos vonal a Maple egyenleteinek ábrázolása, a pontok pedig a numerikus számolás pontjaiból minden harmincadik. (Az azonosan 0 fv-t nem ábrázoltam.)

A 8. ábrán látható, hogy az első három izotóp időfejlődése nem változik meg. A két újabb izotóp eloszlása beáll egy-egy egyensúlyi értékre. Ez nem is meglepő, hiszen a differenciál egyenlet rendszerükben csak pozitív változások szerepelnek, ez pedig azt jelenti, hogy nics olyan lépés, amiben csökkenne a darabszám. Azért konvergál egy egyensúlyi értékhez, (ellenben azzal a lehetőséggel hogy végtelenbe tartana) mert a forrásául szolgáló magok elfognak.



8. ábra. A Maple és a szimuláció megoldásának összehasonlítása az egyszerűsített Fe-Co rendszer 6 izotópja esetén

3.3.4. Φ =áll., elemek = Fe, Co , Ni;

kezdeti feltétel: az első vas gyakorisága 1

A fluxus továbbra is egységnyi és állandó. Most kilenc elemet vizsgálunk, amik 3 egymás alatti sorban helyezkednek el az izotóptérképen. A két alsó sorban lévő magok egymás között β -bomlással és neutron befogással is átalakulhatnak. Az utolsó sorban lévő magok csak kialakulnak, de nem semmisülnek meg. Ez a rendszer a Fe-Co-Ni egyszerűsített modelje.

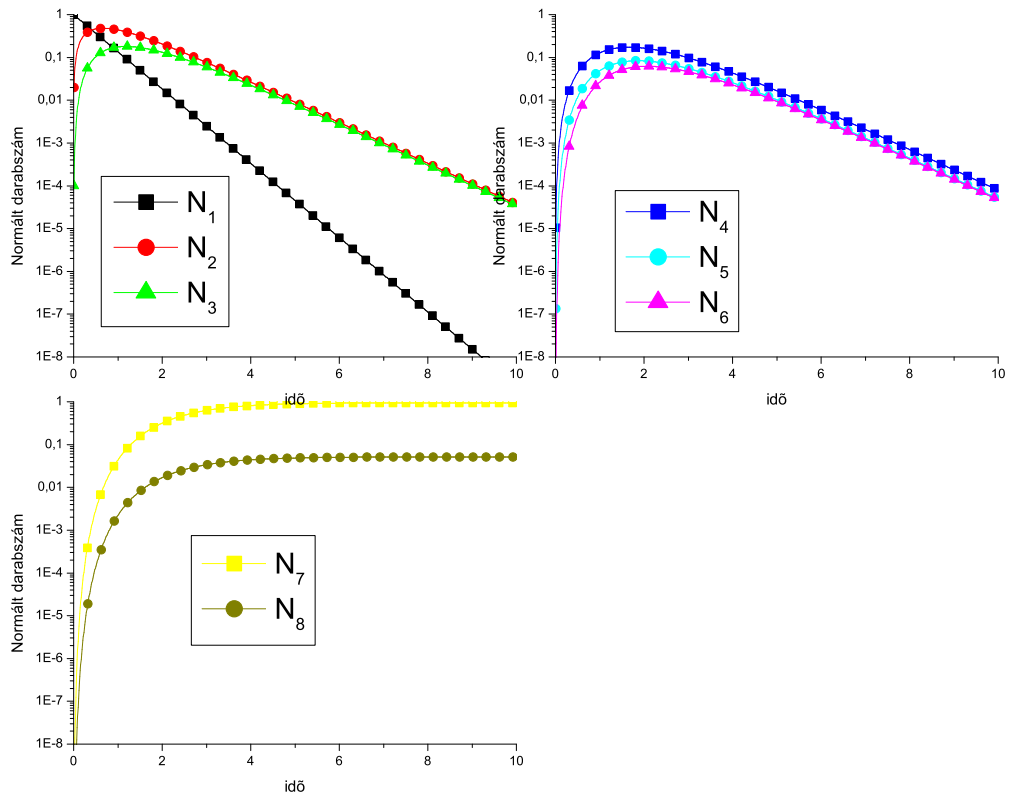
$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0.1$	$\lambda_3 = 0.2$
$\sigma_1 = 2$	$\sigma_2 = 1$	$\sigma_3 = 2$
$N_1(0) = 1$	$N_2(0) = 0$	$N_3(0) = 0$
$\lambda_4 = 0$	$\lambda_5 = 0.4$	$\lambda_6 = 0.3$
$\sigma_4 = 2$	$\sigma_5 = 4$	$\sigma_6 = 5$
$N_4(0) = 0$	$N_5(0) = 0$	$N_6(0) = 0$
$\lambda_7 = 0$	$\lambda_8 = 0$	$\lambda_9 = 0$
$\sigma_7 = 0$	$\sigma_8 = 0$	$\sigma_9 = 0$
$N_7(0) = 0$	$N_8(0) = 0$	$N_9(0) = 0$

2. táblázat. Az harmadik futtatás paraméterei

A Maple megoldás:

$$\begin{aligned}
N_1 &= e^{-2t} \\
N_2 &= -\frac{20}{9} e^{-2t} + \frac{20}{9} e^{-\frac{11}{10}t} \\
N_3 &= -\frac{100}{9} e^{-2t} + \frac{200}{99} e^{-\frac{11}{10}t} + \frac{100}{11} e^{-\frac{11}{5}t} \\
N_4 &= -\frac{202}{9} e^{-2t} + \frac{4220}{891} e^{-\frac{11}{10}t} - \frac{1000}{11} e^{-\frac{11}{5}t} + \frac{6980}{81} e^{-2t} \\
N_5 &= \frac{76475}{972} e^{-2t} + \frac{8000}{2673} e^{-\frac{11}{10}t} - \frac{900}{11} e^{-\frac{11}{5}t} - \frac{505}{27} e^{-2t} + \frac{175}{1188} e^{-\frac{22}{5}t} \\
N_6 &= \frac{9018250}{88209} e^{-2t} + \frac{160000}{56133} e^{-\frac{11}{10}t} - \frac{36000}{341} e^{-\frac{11}{5}t} - \frac{20200}{891} e^{-2t} + \\
&\quad + \frac{1750}{2673} e^{-\frac{22}{5}t} - \frac{1088000}{6380451} e^{-\frac{53}{10}t} \\
N_7 &= -\frac{85075651}{352836} e^{-2t} - \frac{8672000}{617463} e^{-\frac{11}{10}t} + \frac{955800}{3751} e^{-\frac{11}{5}t} + \frac{53833}{891} e^{-2t} - \\
&\quad - \frac{89075}{117612} e^{-\frac{22}{5}t} + \frac{54400000}{338163903} e^{-\frac{53}{10}t} + \frac{553}{583} \\
N_8 &= -\frac{801835}{58806} e^{-2t} - \frac{160000}{205821} e^{-\frac{11}{10}t} + \frac{54000}{3751} e^{-\frac{11}{5}t} + \frac{1010}{297} e^{-2t} - \\
&\quad - \frac{875}{19602} e^{-\frac{22}{5}t} + \frac{1088000}{112721301} e^{-\frac{53}{10}t} + \frac{30}{583} \\
N_9 &= 0
\end{aligned}$$

Az azonosan 0 megoldás oka ugyanaz mint az előző esetben. A folytonos vonal a Maple egyenleteinek ábrázolása, a pontok pedig a numerikus számolás pontjaiból minden harmincadik.

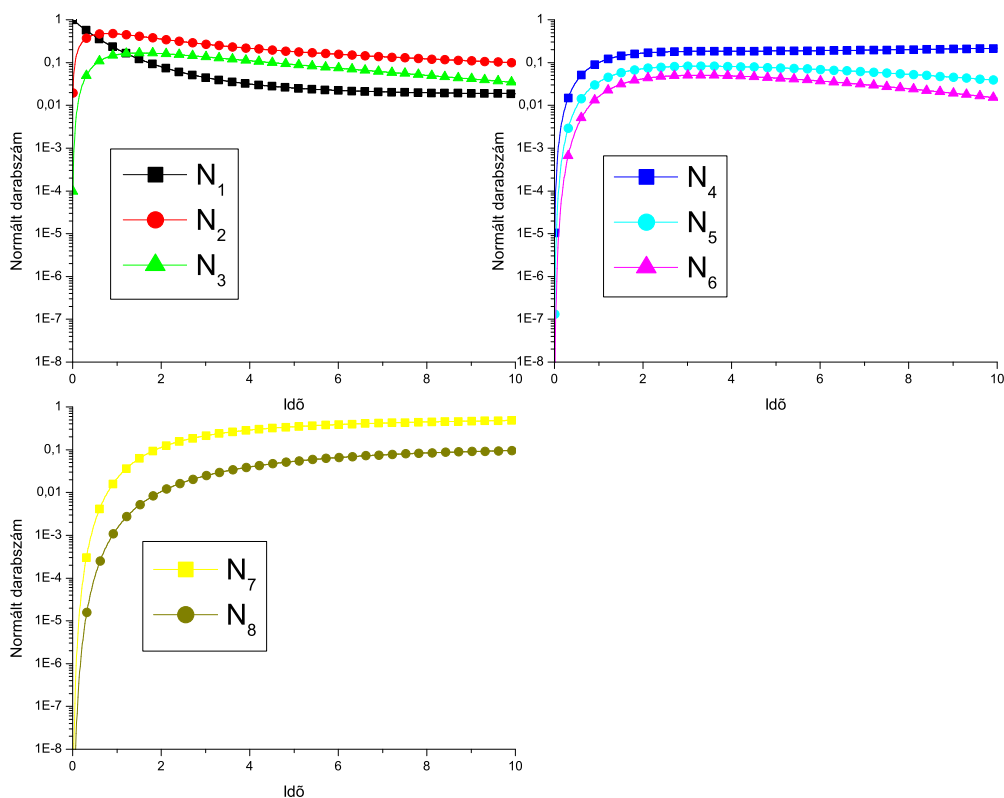


9. ábra. A Maple és a szimuláció megoldásának összehasonlítása

A 9. ábrán külön grafikonokon vettük fel a háromféle rendszámú mag időfejlődését. Az első három mag időbeli fejlődésére nincsenek befolyásal az utánuk következő magok. A második három mag csak átmenetileg létezik. Rövid időállandóval kialakulnak, majd mindhárom gyakorisága exponenciálisan lecsökken. Az utolsó két mag stabil, gyakoriságuk aszimptotikusan konvergáll egy bizonyos értékhez.

**3.3.5. Φ =exponenciális-lecsengés, elemek = Fe, Co, Ni;
kezdeti feltétel: az első vas gyakorisága 1**

Ebben a részben a neutronfluxus egy idealizált 2-es időállandóval elfogy. A kiindulási elemszám és a paraméterek megegyeznek az előző részben alkalmazottakkal. Ez a neutronfluxus áthaladásának végén bekövetkező állapot. Itt is összehasonlítjuk a Maple egzakt megoldását a numerikus szimulációval. Az MAPLE által kiadott egyenleteket nem közöljük, mert több oldalt venne igénybe, viszont az összehasonlításához elég a grafikonja.



10. ábra. A Maple és a szimuláció megoldásának összehasonlítása, miközben csökken a neutronsűrűség

A 10. ábrán azt látjuk, hogy a kiindulási izotóp száma lecsökken, de beáll

egy egyensúlyi értékre. Ennek az az oka, hogy a β -bomlási állandója nulla, így a neutronfluxus megszűnésével az átalakulása is megszűnik. A többi elem fogyásának időállandója is jóval megnövekszik, ez a neutronbefogási reakcióráta és a β -bomlási állandó nagyságrendi különbsége okozza.

3.3.6. A konvergencia tesztelése

A következő fejezetben megállapítjuk, hogy milyen mintavételi gyakoriság kell bizonyos pontosság eléréséhez. Ezekben a tesztekben az irodalmi β -bomlási állandókat használom. A stabil elemekre a neutronbefogási párreakció rátákat szintén az irodalomból veszem. Az instabil elemek esetében a reakciórátaikat minden elméleti megfontolást mellőzve vettük fel. Csa azt tartottuk szem előtt, hogy a stabil elemek befogási hatáskeresztmetszeteivel egy nagyságrendbe essen. Ezekben a szimulációkban a kiinduló elem gyakoriságát állandónak tartva futtatom a kódot, így minden átmeneti elem egy egyensúlyi eloszlás felé tart. Kétféle elem négyféle izotópját használjuk. Az egyensúlyi eloszlás számértékét határozzuk meg a program különböző felbontásokkal való futtatásából, és a MAPLE egzakt függvényeinek megfelelő helyen történő kiértékeléséből.

A bemeneti paraméterek a következők:

$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 1.8 \times 10^{-7}$	$\lambda_3 = 1.5 \times 10^{-14}$	$\lambda_4 = 1.9 \times 10^{-3}$
$\sigma_1 = 2.68 \times 10^{-18}$	$\sigma_2 = 7 \times 10^{-19}$	$\sigma_3 = 5 \times 10^{-19}$	$\sigma_4 = 1 \times 10^{-18}$
$N_1(0) = 1$	$N_2(0) = 0$	$N_3(0) = 0$	$N_4(0) = 0$
$\lambda_5 = 0$	$\lambda_6 = 4.2 \times 10^{-9}$	$\lambda_7 = 1.2 \times 10^{-4}$	$\lambda_8 = 7.7 \times 10^{-3}$
$\sigma_5 = 0$	$\sigma_6 = 0$	$\sigma_7 = 0$	$\sigma_8 = 0$
$N_5(0) = 0$	$N_6(0) = 0$	$N_7(0) = 0$	$N_8(0) = 0$

3. táblázat. A futatás paraméterei

Először a neutronsűrűséget $10^{15} \frac{db}{cm^3}$ -nek vettük, az eloszlásokat a 10000. másodpercben vizsgáltam. A kimenetet a 4. táblázat tartalmazza. Az első oszlopban a felbontás nagyságát jelzem, a másik háromban az átmeneti elemek egyensúlyi eloszlását. Ha két tizedes jegy pontossággal megelégszünk,

10^1	3.77325	5.17486	0.88840
10^0	3.81898	5.23749	0.89915
10^{-1}	3.82359	5.24381	0.90023
10^{-2}	3.82405	5.24444	0.90034
MAPLE	3.82410	5.24586	0.90059

4. táblázat. A futatás paramétere

akkor ilyen neutronsűrűség mellett 1 másodperces felbontás elég.

Másodszor a neutronsűrűséget $10^{20} \frac{db}{cm^3}$ -nek vettük, az eloszlásokat a 1. másodpercben vizsgáltam. A kimenetet az 5. táblázat tartalmazza. Az első oszlopban a felbontás nagyságát jelzem, a másik háromban az átmeneti elemek egyensúlyi eloszlását.

10^{-3}	3.35299	5.70163	2.35076
10^{-4}	3.77766	5.28881	2.64435
10^{-5}	3.82344	5.35282	2.67636
10^{-6}	3.82805	5.35928	2.67958
MAPLE	3.82857	5.36000	2.67994

5. táblázat. A futatás paramétere

Ha két tizedes jegy pontossággal megelégszünk, akkor ilyen neutronsűrűség mellett 10^{-5} másodperces felbontás elég.

Az ehhez hasonló vizsgálatot minden egyes futatásnál elvégeztük, és az alapján állítottuk be az időfelbontást.

3.4. Megoldások az irodalmi adatokkal

A következő fejezet a differenciál-egyenlet megoldó program futtatásainak eredményeit tartalmazza. Különböző neutronfluxusok, és hőmérsékletek mellett meghatároztuk a β -bomlás elágazási arányokat a ^{56}Fe - ^{69}Fe magokra. A differenciál-egyenletekhez szükséges bemenő paraméterek a következő helyekről származnak:

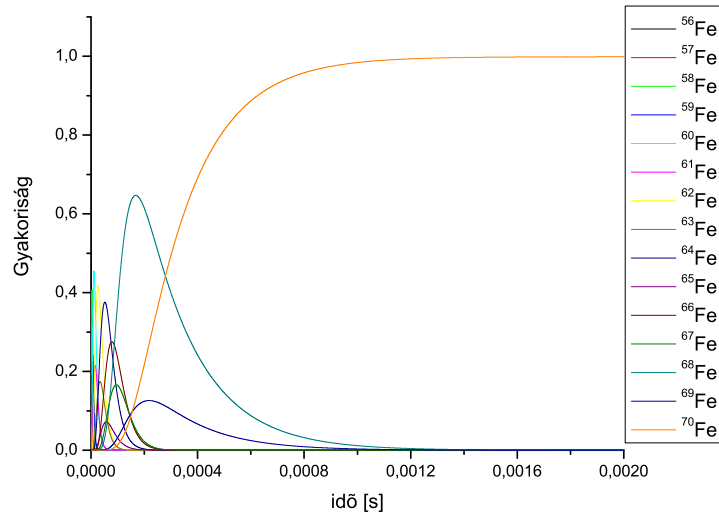
- β -bomlási állandók: NuDat [11]
- Neutronbefogási reakcióráta: Rauscher és Thielemann [12].

Ezek az adatok már sokkal jobb közelítései a valóságnak, mint a korábban használtak. A reális adatok mellett a reakciójálónk még tartalmazza a következő vas izotópot (^{70}Fe), amihez $\lambda = 0$ -t és $\langle\sigma v\rangle = 0$ -t rendeltünk, így vizsgálhatjuk, hogy a kiindulási magok hányad része jutott túl a vizsgált állapotokon. Felvettük még a differenciálegyenlet rendszerbe a ^{56}Co - ^{69}Co izotópokat is, viszont ezeket a magokat stabilnak tekintjük, tehát amennyi kialakult belőlük, annyi marad. Ezzel meg tudjuk vizsgálni, hogy a vasak átalakulása közben mennyi mag csatolódik ki a kobaltok irányába, illetve azt, hogy a folyamat fő útvonala merre tart. Egyszerűség kedvéért még egy átjelölést is bevezetünk, mégpedig a továbbiakban S -el jelöljük a $\frac{db}{cm^3}$ -ben mért neutronsűrűség számértékének tízes alapú logaritmusát.

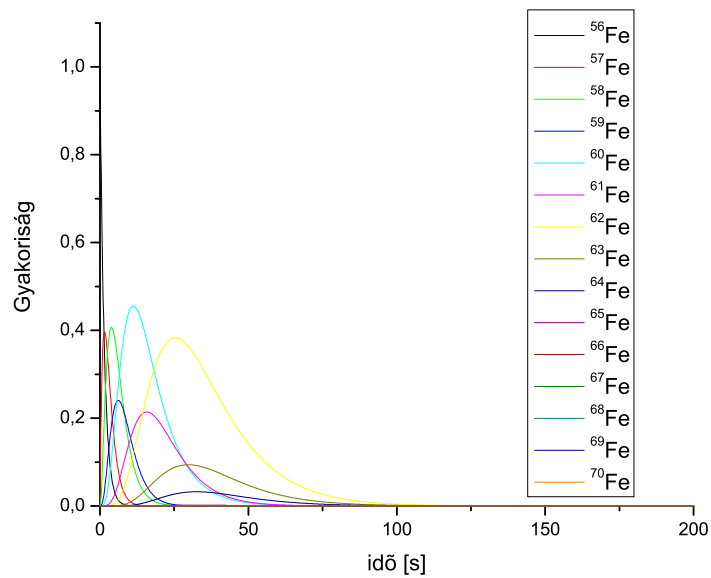
3.4.1. Tipikus időfüggések

A szimuláció kimeneti file-ként előállítja az egyes izotópok számának időbeli fejlődését. Tipikusan ezek különböző időállandóval felfutó és lefutó exponenciálisok szuperpozíciói. Ebben a formában még analitikusan is megadhatók a görbék, de minél több tagot tartalmaz a szuperpozíció annál bonyolultabbak. A 11. és 12. ábrákon az összes vas mag tipikus időfüggése látható.

A 11. ábrán jól látható, hogy nagyobb neutronsűrűség mellett az összes vas izotóp rövid ideig (néhány $100 \mu\text{s}$) számottevő mennyiségben kialakul,



11. ábra. A vas izotópok időbeli alakulásának tipikus görbéi nagy neutronsűrűségnél ($S = 23$ és $T_9 = 1$)



12. ábra. A vas izotópok időbeli alakulásának tipikus görbéi kis neutronsűrűségnél ($S = 17$ és $T_9 = 1$)

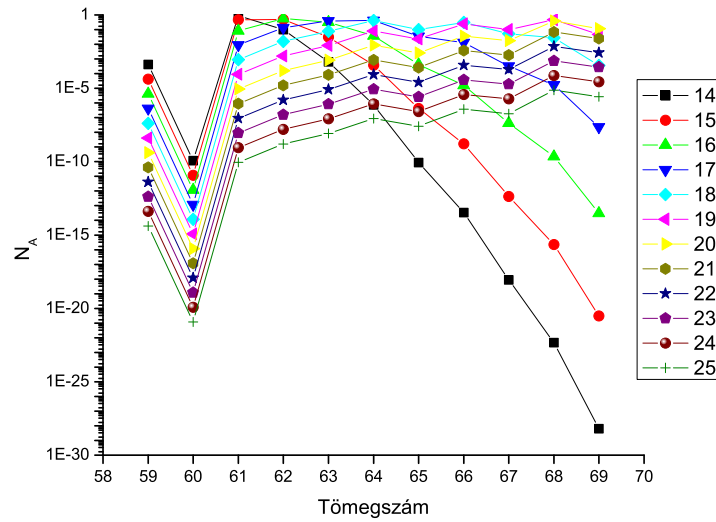
majd megsemmisül. A felfutó, és közel 1 értékre konvergáló sárga görbe pedig azt mutatja, hogy ez a rövid idő nem elég arra, hogy jelentős hányaduk csatolódjon ki a kobaltok irányába. A 12. ábrával összehasonlítva lényeges különbség az időskála. Míg nagy neutronsűrűségnél kb. 8 ms alatt a ^{70}Fe kivételével az összes mag megsemmisült, azalatt kis neutronsűrűségnél létre sem jön az összes, és ami létrejött, annak megsemmisüléséhez legalább 100 s-ra szükség van. Ebben az esetben nincs is olyan mag ami telítődik, tehát a folyamat hamarabb bekanyarodik a kobaltok irányába.

3.4.2. A β -bomlások számának neutronsűrűség-függése

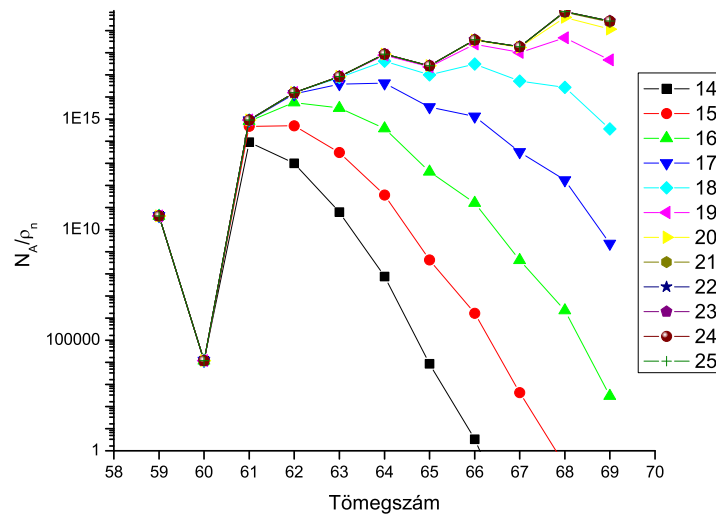
Ebben a részben $T_9 = 1$ esetén megvizsgáljuk mekkora az a minimális neutronfluxus ami mellett már végigsöpör a folyamat az összes általunk vizsgált magon. A 13. ábrán a kobaltok aszimptotikus eloszlásának konvergálás utáni értékei láthatók (N_A). Ezek a számok megegyeznek azzal, hogy a teljes folyamat során egy-egy vas izotópból mennyi β -bomlott. Megfigyelhető hogy az eloszlások menete egy kritikus sűrűség felett (jelen paraméterek mellett ez $\rho = 10^{20} - 10^{21} \frac{\text{db}}{\text{cm}^3}$ között van) teljesen azonos, csak egy-egy nagyságrend különbség van az amplitúdójuk között. Továbbá a kritikus érték alatt az eloszlások kisebb tömegszámhoz tartozó szakasza a nagyságrendi faktortól eltekintve azonos.

A kritikus sűrűség jobb megfigyelhetősége kedvéért az eloszlások egymásba skálázhatók, ha mindegyiket megszorozzuk a hozzá tartozó neutronsűrűséggel. Az átskálázott gyakoriságok a 14. ábrán láthatók. Így látszik igazán a korábbi állítás, miszerint bizonyos sűrűség felett az eloszlások azonosak. Jelölje ezt az egységes eloszlást $g_c(A)$.

Az eloszlások alakja jól magyarázható a neutronsűrűség változásával. Ha nagyon kevés a neutron, akkor csak a stabilitáshoz közeli izotópok képesek kialakulni, mielőtt β -bomlanának. Tehát a reakciófolyam iránya hamarabb bekanyarodik, a nagyobb rendszám irányába. Növelve a neutronsűrűséget ez a kanyarodási pont egyre nagyobb tömegszámnál következik be. Elérve a kritikus sűrűséget, beáll egy aszimptotikus alak.



13. ábra. Különböző neutron-sűrűségek mellett kialakuló Co eloszlások. Különböző színek = különböző neutron-sűrűség (S)

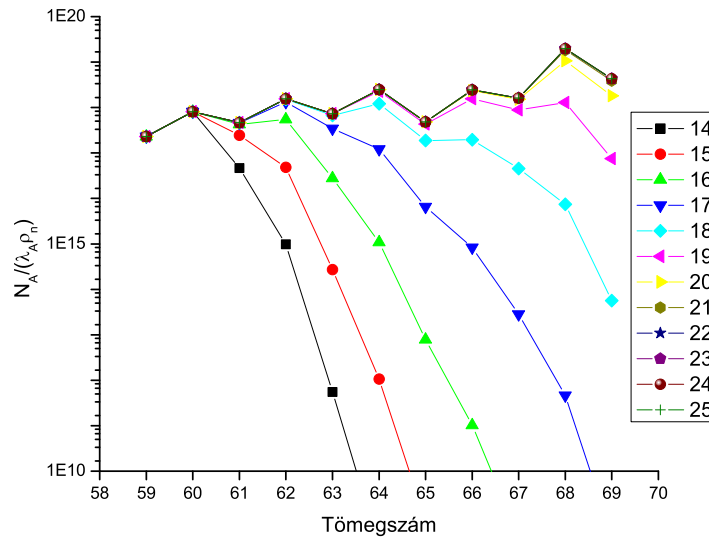


14. ábra. Különböző neutron-sűrűségek mellett kialakuló, a neutron-sűrűséggel leosztott Co eloszlás

Érdeemes megvizsgálni, miért ilyen az eloszlás karakterisztikus tömegszám függése. A β -bomlások darabszáma minden időpillanatban az anyaelem aktivitásával egyenlő, így a végső kobalt eloszlás, (ami megegyezik a β -bomlások számával) az aktivitás integrálja a teljes vizsgált időintervallumra. Az aktivitás pedig mindig az anyaelem száma szorozva a bomlási állandóval. Esetünkben a bomlási állandó konstans, így kiemelhető, és marad az anyaelemek időbeli integrálja, amit a későbbiekben M_A -el jelölünk.

$$N_\beta(A) = \int_0^T A(t) dt = \int_0^T \lambda_A N_A(t) dt = \lambda_A \int_0^T N_A(t) dt = \lambda_A M_A \quad (6)$$

Végül összehasonlíthatjuk a neutronsűrűséggel leskalázott eloszlást, minden értéknél elosztva a hozzá tartozó bomlási állandóval különböző neutronsűrűségek esetén. Ezt a 15. ábra tartalmazza. Ezen is jól látható, hogy minél több a neutron annál magasabb tömegszámú vas izotópok is kialakulnak.



15. ábra. Különböző neutronsűrűségek mellett kialakuló, a neutronsűrűséggel és bomlási állandóval leosztott Co eloszlás

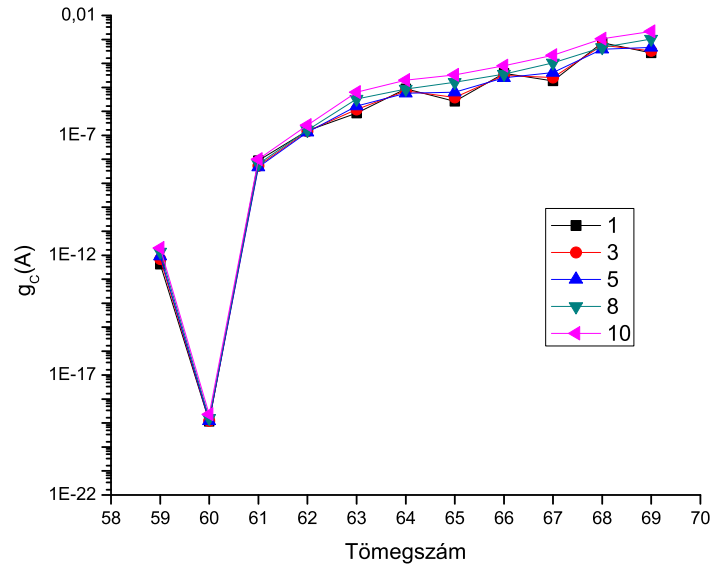
Végül M_A -kat is kiszámoltuk, és megállapítottuk, hogy ezek a pontosság

határán belül megegyeznek a 15. ábra eloszlásaival, ebből levonható az a következtetés, hogy a szimulációs programunk működőképes.

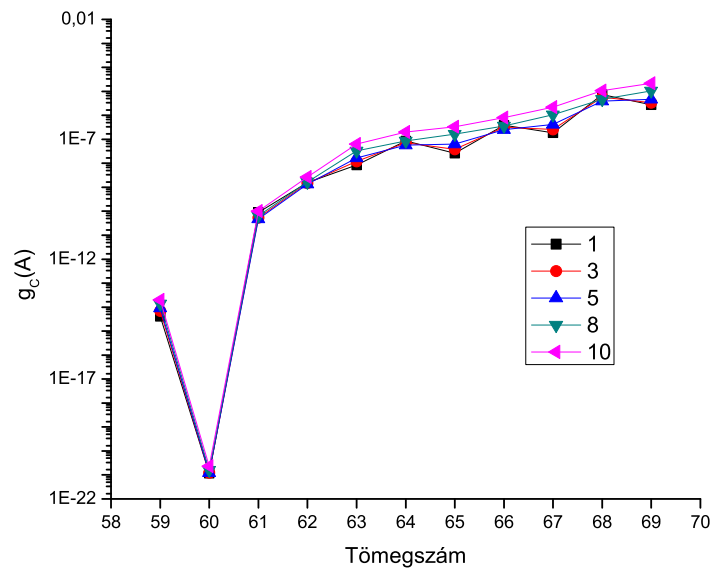
3.4.3. A β -bomlások számának hőmérséklet-függése

Ebben a részben azonos neutronsűrűségnél a különböző hőmérsékletek mellett kialakuló Co-t eloszlásokat ábrázoljuk. Azt már korábban megállapítottuk, hogy létezik egy kritikus sűrűség ami felett már nem változik az eloszlások alakja. Most azt szeretnénk megállapítani, hogy ezt az alakot mennyire befolyásolja a hőmérséklet változás. A 16. és 17. ábrán az egyensúlyi Co gyakoriságokat ábrázoljuk.

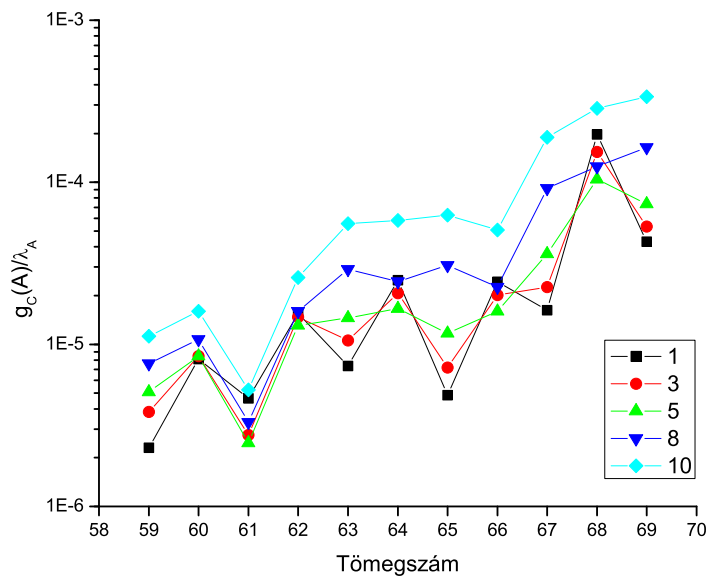
A 18. és 19. ábrák a bomlási állandóval elosztott Co gyakoriságok. Ezeket az ábrákat jobb áttekinthetőség kedvéért érdemes felvenni. Így sokkal jobban látszik az aszimptotikus alak megváltozása. A hőmérséklet növelésével a görbe alakja kisimul, több keletkezik a páratlan tömegszámú izotópokból. Egy alapvető magfizikai tulajdonság, hogy a páros proton- vagy páros neutrons számú magok mindig kötöttebbek mint a páratlanok. Jelen esetben 26-os rendszámú vasakat vizsgálunk, így a protonszám minden esetben páros. Ezek után már csak a neutronok páros vagy páratlan léte befolyásol. Mivel a páros neutrons számú mag kötöttebb mint szomszédai így általában kisebb a neutronbefogási hatáskeresztmetszete, mint a szomszédainak. Ez azt jelenti, hogy a magok nagyobb része tartózkodik páros tömegszámú állapotban, így belőlük több kobalt tud keletkezni. Ezt a törvényszerűséget kis hőmérsékleten a grafikon is visszaadja. Ha növeljük a hőmérsékletet akkor megváltozik a helyzet. Ennek az az oka, hogy ilyenkor már nem csak alapállapotú magok vannak, hanem az alacsonyabb gerjesztett állapotok is véges valószínűséggel vannak jelen. Ezek befogási hatáskeresztmetszetei pedig már nem követik a korábban említett szabályszerűséget.



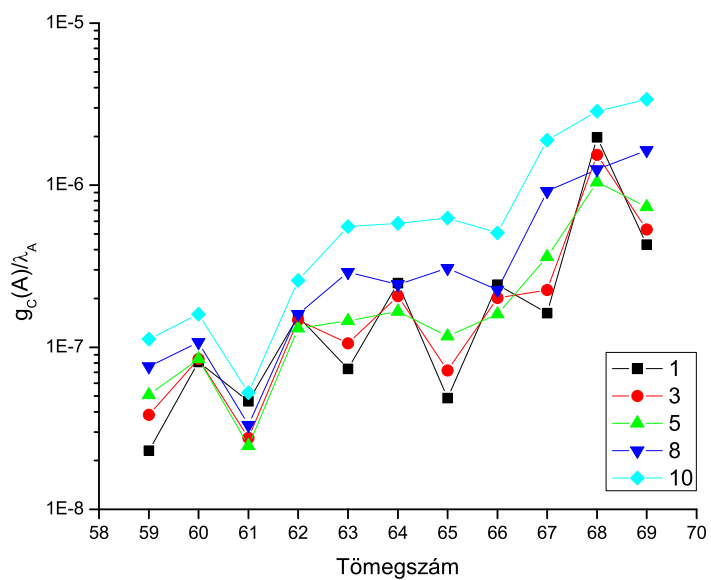
16. ábra. A Co gyakoriságok hőmérséklet-függése ($S=23$). Különböző színek = különböző hőmérséklet (T_9)



17. ábra. A Co gyakoriságok hőmérséklet-függése ($S=25$)



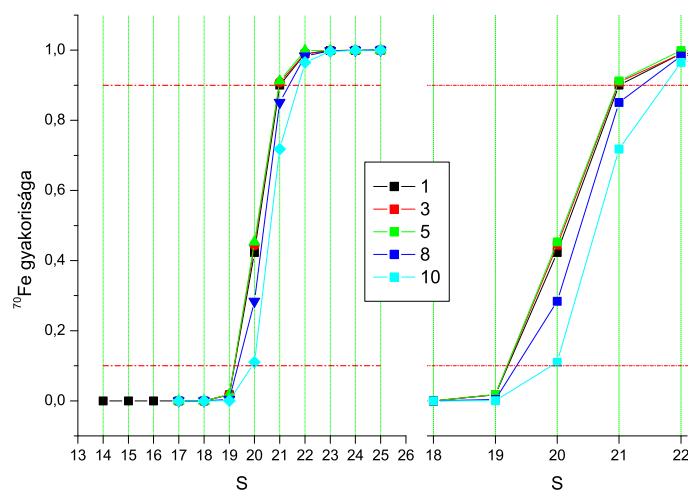
18. ábra. A Co gyakoriságok hőmérséklet-függése (S=23)



19. ábra. A Co gyakoriságok hőmérséklet-függése (S=25)

3.4.4. A legvalószínűbb elágazási pont meghatározása

A következőkben a különböző futtatások alkalmával a ^{70}Fe végső darabszámát vesszük szemügyre különböző neutronsűrűségek, és különböző hőmérsékletek mellett. A 20. ábra tartalmazza a különböző hőmérsékletek mellett kialakult végső ^{70}Fe darabszámot, illetve a gyorsan változó szakasz kinagyított képét. Látszik, hogy 19 és 22 a kritikus neutronsűrűség, kettő között lép fel a függvény 0-ról 1-re. Az ábrán látható két szaggatott vízszintes vonal 0,1-nél és 0,9-nél található. Azt nevezzük kritikus szakasznak, amikor átlépi a görbe ezt a két értéket. Ha kisebb mint 0,1 akkor a magok nagy része nem jut el a ^{70}Fe állapotba, hanem valahol kiágazik a kobaltok irányába. Viszont ha 0,9-nél nagyobb, az azt jelenti, hogy a magok nagy része eljut a ^{70}Fe állapotig, és menne tovább is, csak ennek ez a szimuláció kezdeti paraméterkészlete gátat szab. Az is megfigyelhető a görbeseregéből, hogy a hőmérséklet növelésével ez a kritikus szakasz nagyobb neutronsűrűségek felé tolódik. A reakcióháló bővítéshez szükség lenne a nagyobb neutronsámú vas izotópok felezési idejeire is!



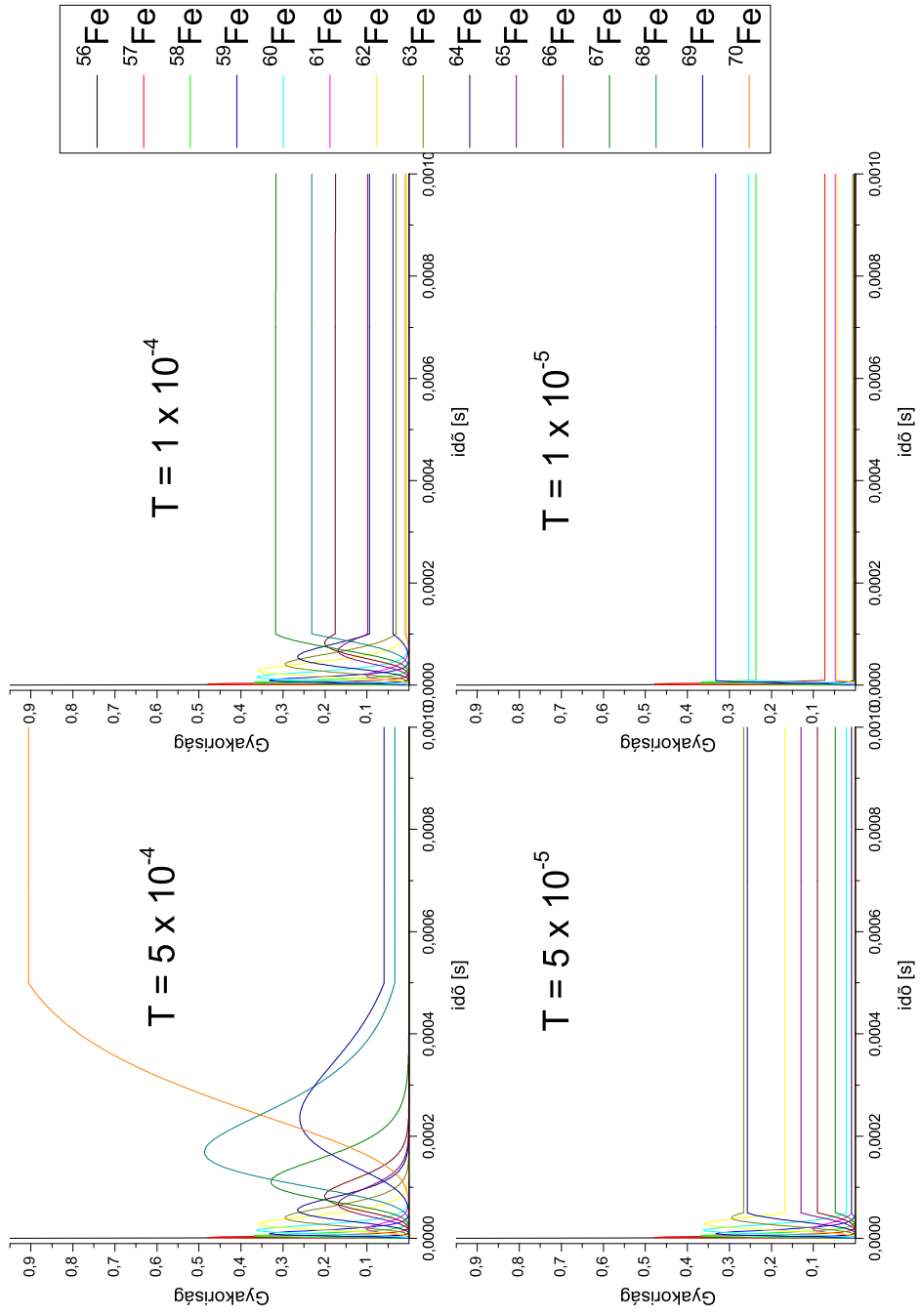
20. ábra. A ^{70}Fe egyensúlyi darabszámának neutronsűrűség és hőmérséklet-függése. Különböző színek = különböző hőmérséklet (T_9)

3.4.5. A neutronsűrűség időbeli változásának hatása

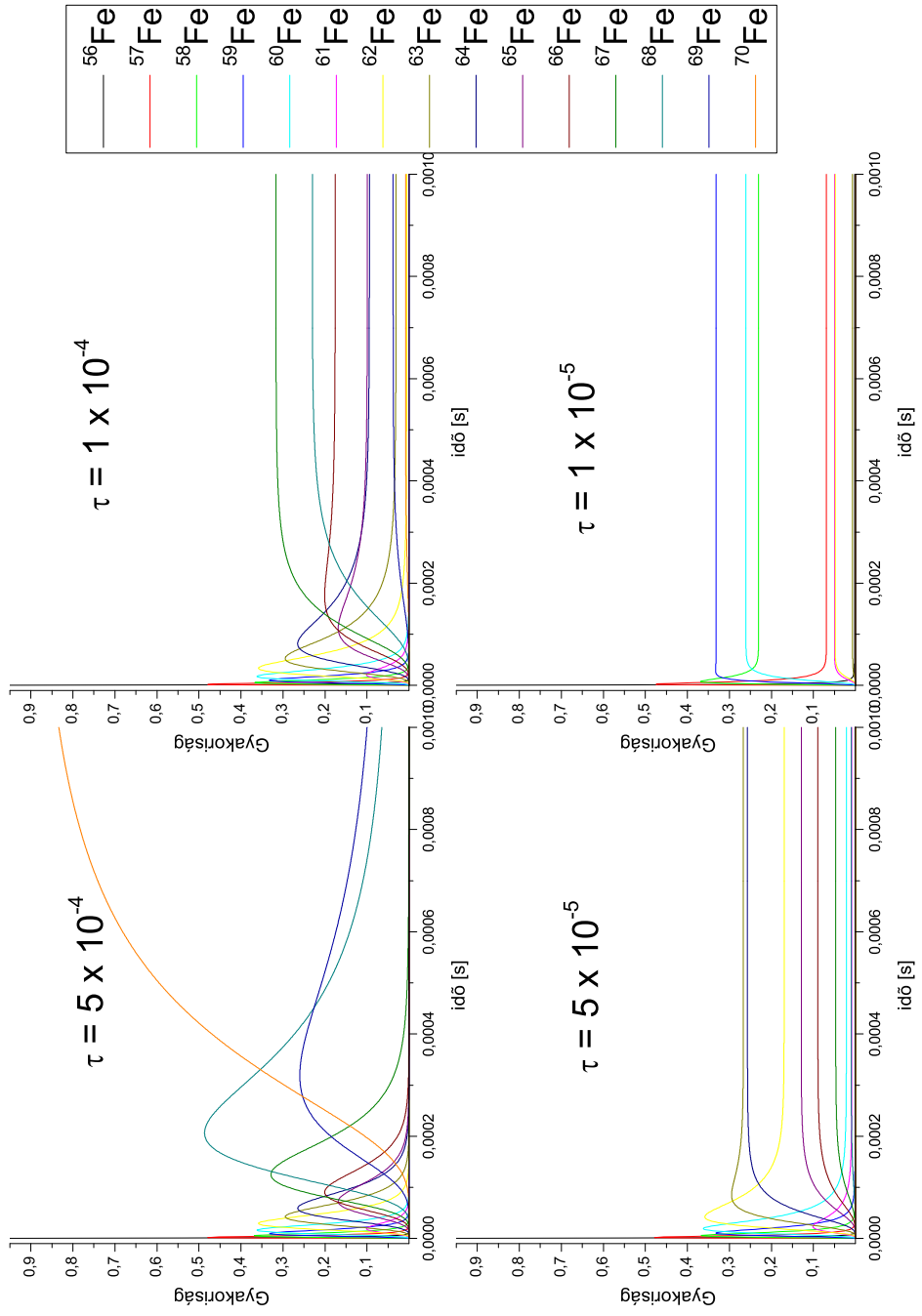
Kétféle neutronsűrűség függvény mellett vizsgáltuk meg a vas izotópok gyakoriságok időfejlődését. Az időfüggvények különböző időállandóinak változtatásával azt várjuk, hogy ha gyorsan elfogy a neutron akkor nincs elég idő az össze izotóp felépülésére, míg ha az adott neutronsűrűségre jellemző felépülési időállandónál később fogy el, akkor nem tapasztalunk jelentős változást. A kezdő neutronsűrűség minden esetben $S=23$, és a hőmérséklet $T_9 = 5$. Ilyen paraméterek mellett az utolsó instabil izotóp kb 10^{-3} s alatt bomlik el. Az első vizsgált függvény egy lépcsőfüggvény:

$$\varrho(t) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{ha } t < T \\ 0 & \text{ha } t > T \end{cases}$$

T változtatásával a 21. ábrán látható időfüggések alakulnak ki. Jól látható a neutronok megszűnésekor minden görbében törés van, de a törés előtti szakaszuk azonos. Minél korábban fogy el a neutron annál kisebb tömegszámú izotópok vannak még csak jelen. A törés után már újabb vas izotópok nem alakulnak ki, a már kialakultak gyakorisága pedig változatlanok tűnik. A stabil izotópok kivételével (^{56}Fe , ^{57}Fe , ^{58}Fe) ez a változatlanosság nem igaz. Az instabil magok gyakoriságának időfejlődése nagyon hosszú időállandóval lecsengő exponenciális, amiknek ez a szakasza egyenesnek tűnik. Például a ^{59}Fe esetén ez az időállandó 44,5 nap, a ^{60}Fe esetén pedig 1,5 millió év, de az összes többi izotóp esetén is 0,1 és 100 másodperc között van, ezért az 1 ms-os skálán egyenesnek látszik.



21. ábra. A vas izotópok gyakoriságának időfüggése, lépcsőfüggvényként előfogyó neutronssűrűség mellett



22. ábra. A vas izotópok gyakoriságának időfüggése, exponenciálisan elfogyó neutronsűrűség mellett

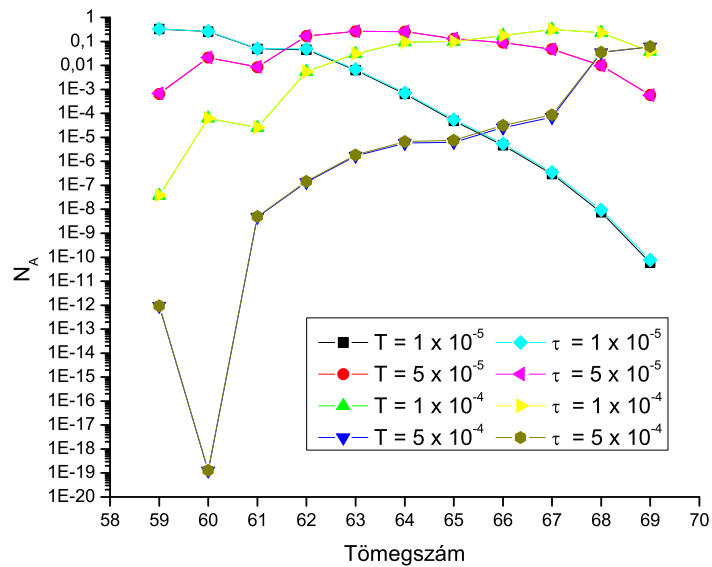
A második vizsgált függvény egy exponenciális lecsengés:

$$\varrho(t) = \varrho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

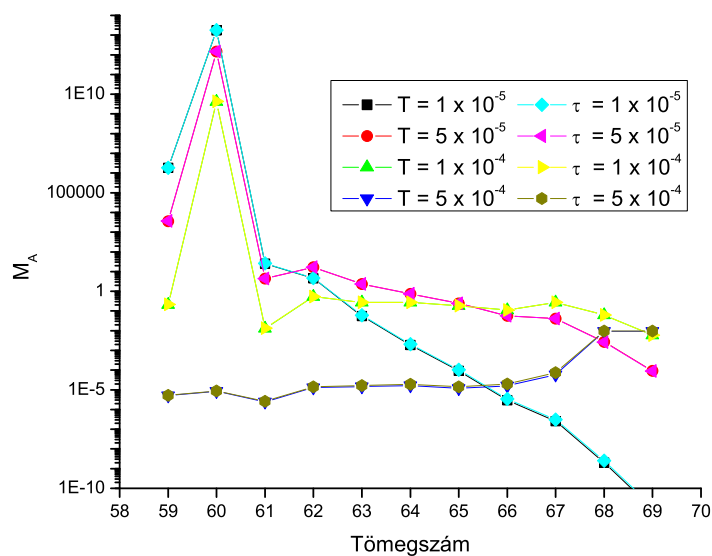
τ változtatásával a 22. ábrán látható időfüggések alakulnak ki. Ezek a görbék sokkal simábbak mint az előzők, de ugyanúgy közel vízszintes egyenesbe konvergálnak. A változatlanul tűnő görbeszakaszok szintén ugyan azok a hosszú időállandójú exponenciálisok mint az előző esetben, viszont ami még megfigyelhető, hogy ezeknek kiinduló értéke nem ugyan az a két esetben.

Érdekes még megvizsgálni a Fe izotópok görbéinek integrálját (M_A), illetve ami ezzel ekvivalens, a Co-k végtelenben vett gyakoriságát elosztva a β -bomlási állandókkal. Ebből látható majd, hogy melyik izotóp mekkora számban alakult ki. Mivel most a β -bomlások időállandóival csengenek le a gyakoriságok, ezért nem futattuk végig a szimulációt, hanem a neutronok elfogyási időállandójának tízszeresekor megállítottuk. Ezután az instabil vas izotópok gyakoriságát és az azonos tömegszámú kobaltok gyakoriságát összeadtuk, hiszen neutronok nélkül a vasak csak a nekik megfelelő kobaltokká képesek alakulni, mindez csak idő kérdése.

Az így előállított Co gyakoriságokat a 23. ábrán látható, a vas izotópok gyakoriságának integrálja pedig a 24. ábrán. Ami szembeűnő, hogy az időfüggvény alakja nem befolyásolja számottevően az eloszlások menetét. Ezt megérthetjük, ha megvizsgáljuk mennyi volt az időben összegzett neutron-sűrűség. A két függvény 0-tól végtelenig vett időintegrálja $\varrho_0 T$ illetve $\varrho_0 \tau$. Ebből látszik, hogy ha T és τ azonos, akkor időben átlagolva ugyanannyi neutron érte a vas magokat, tehát ugyanannyit voltak képesek magasabb tömegszámúvá alakítani. Emellett megfigyelhető az a tendencia, hogy minél rövidebb ideig tartott a neutronok jelenléte, annál kisebb tömegszámig alakultak ki a vas izotópjai.



23. ábra. A Co gyakoriságok elfogyó neutronsűrűségek mellett



24. ábra. A Fe izotópok integráljának változása a neutronsűrűség időbeli változásával

4. Összefoglalás

A dolgozat összefoglalja az elemek keletkezéséről eddig megszerzett magfizikai tudást, vázlatosan leírja a csillagok fejlődést, és részletesebben kitér, a nehéz elemek szintézisére. Ehhez felvázol egy szupernóva robbanás modellt, ami megteremti az r-folyamathoz szükséges környezetet.

Ezek után bemutat egy reakcióháló megoldó programot, amivel bizonyos izotópok számának időbeli fejlődését kaphatjuk meg, ha ismerjük az izotópokat egymásba alakító folyamatokat. A program egyszerűbb paraméterekkel történő tesztelése közben a használt differenciálegyenlet-rendszert szimbolikusan is megoldottuk, így összehasonlíthatóvá vált a numerikus szimuláció az egzakt matematikai eredményekkel. Az előre meghatározott pontosságon belül egyezést tapasztaltuk.

A program segítségével megvizsgáltuk, vas izotópok számának időbeli fejlődését, neutron befogási reakciókat és β -bomlásokat feltételezve. Megvizsgáltuk az időfejlődéseket a legfontosabb paraméterek függvényében, és a következőket tapasztaltuk:

- A β -bomlások száma függ a rendszerre ható neutronsűrűségtől, de ha normáljuk a neutronsűrűséggel, akkor egy bizonyos kritikus sűrűség felett beáll egy állandó alak. Ez a kritikus sűrűség $\rho = 10^{20} - 10^{22} \frac{db}{cm^3}$ között van, attól függően, hogy mekkora a hőmérséklet.
- Megállapítottuk, hogy a β -bomlások száma nem függ lényegesen a hőmérséklettől.
- Megvizsgáltuk, hogy a mekkora az a kritikus neutronsűrűség, ami mellett a ^{56}Fe - ^{69}Fe magok mindegyikén végighalad a folyamat. Ebből meghatározott kritikus sűrűség megegyezik az összes β -bomlás állandósult görbéiből kapott-tal. Itt fontos megállapítani, hogy a szupernóva robbanás tipikus idejét figyelembe véve, a neutronsűrűség az általunk megállapított kritikus érték felett van. Ebből az következik, hogy a folyamat fő iránya túlmutat az általunk vizsgált magokon. A ^{70}Fe -

nél nehezebb vas izotópok felezési ideje jelenleg nem ismert, viszont a reakciómű bővítéséhez szükség lenne rájuk!

- Végül megállapítottuk azt is, hogy az alkalmazott neutronssűrűség változásának függvénye nem változtat lényegesen a β -bomlások eloszlásán, viszont időállandója nagyban befolyásolja a folyamat irányát, ezért ezt is pontosabban kellene ismernünk.

5. A csillagfejlődés tanítása a középiskolában

5.1. A téma elhelyezése a tananyagban

A legújabb kerettanterveket megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy a kozmológiával és a csillagfejlődéssel kapcsolatban csökkentették a tananyagot minden iskola típusban. Az egyik jelenlegi kerettanterv [13] erre vonatkozó részét a 6. táblázat mutatja. A diákoknak tudnia kell az ősrobbanás elméletről, és az univerzum tágulásáról, tudniuk kell a csillagfejlődés fázisait, de az égi objektumok elnevezései (kvazár, pulzár, neutron csillag, fekete lyuk) már kikerültek a tananyagból.

Gimnázium:	
Csillagfejlődés	A csillagok születése, fejlődése és pusztulása.
Kozmológia alapjai	Az Univerzum tágulása. Hubble-törvény. Ősrobbanás elmélet.
Szakközép iskola:	
Csillagfejlődés	A csillagok születése, fejlődése és pusztulása.
Kozmológia alapjai	Az Univerzum tágulása. Ősrobbanás elmélet.
Szakiskola:	
Csillagfejlődés	A csillagok születése, fejlődése és pusztulása.
Kozmológia alapjai	Az Univerzum tágulása. Ősrobbanás elmélet.

6. táblázat. A kerettanterv témához kapcsolódó része

Ez a téma a 11. osztály végén kerül elő. Ez az utolsó év, amikor fizikát oktatnak, így előfordul, hogy a tanárok fontosabbnak tartanak más témaköröket, és „sajnos” ezt már csak érintőleg tanítják. Ehhez hozzájárul az is, hogy az érettségi követelmény rendszerben a csillagok életének fázisai nem szerepelnek. Pedig ez egy olyan téma, ami szerintem az elemi érdeklődés egyik fókuszpontjában van. Mindenki kíváncsi arra, hogy az a sok fényes dolog az égen, hogyan is került oda, és miért is ragyogja be az éjszakai égboltot. Véleményem szerint kár lenne, kihagyni a fizika oktatásból!

A dolgozatom következő részében némi betekintést próbálok nyújtani abba,

hogyan is lehetne, ezt a témakört behelyezni az oktatás menetébe, úgy hogy ne igényeljen sokkal több plusz időt. Természetesen a rendelkezésre álló idő kibővítése lenne a legjobb, mert ekkor sokkal több gondolatébresztő feladat férne el a normál tanórákon is, amik ha felkeltik az érdeklődést, és ezzel önálló után olvasásra, kutatásra sarkallják a diákokat. Véleményem szerint ez lenne az összes természettudomány alapvető célja, hogy fenntartsa a diákokban az alapvető érdeklődést a világ megismerése iránt, és biztassa őket, hogy saját maguk is megismerhetik azt.

A szűkös idő kihasználásához egy lehetséges tanóra tervét vázoló fel. A téma megfelelő ahhoz, hogy rengeteg korábbi ismeretet használjunk fel. Így nemcsak a modern fizika témakörét ismételhetjük át, hanem a klasszikus mechanikát (kinematikát) és a termodinamika kinetikus gázelméletre vonatkozó fejezeteit is. Ennek eléréséhez, néhány lehetséges feladatot, és azok megoldását is leírom, a dolgozatomban. Mindezzel elérhetjük, hogy a diákok képet kapjanak az égi objektumok egy nagy csoportjáról, azok fejlődéséről, és a naprendszerünk anyagainak kialakulásáról. Eközben pedig nem veszítünk időt a korábban tanított anyagok különálló órákon történő felelevenítésével, ami az érettségire való felkészítéshez elengedhetetlen.

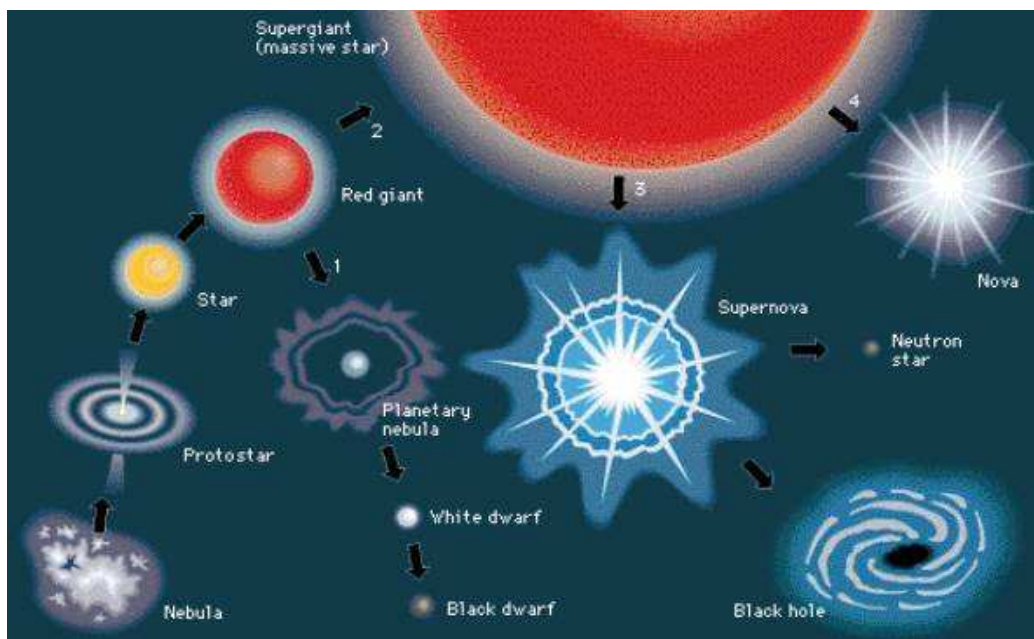
A későbbi fejezetek pedig a témához kapcsolódó szakkör tervei. Itt is felvázolom a foglalkozások anyagát, és a lehetséges kapcsolódó feladatokat. Így az érdeklődő tanulókkal a csillagfejlődés néhány pontját részletesebben megvizsgálhatjuk, és a diákokat továbbgondolásra ösztönözhetjük.

5.2. Csillagfejlődés tanóra kidolgozása a 11. osztályos fizikaórán

5.2.1. Óravázlat

Az óra témája a csillagfejlődés. Célja a csillagok életének bemutatása, és néhány égi objektum tulajdonságainak bemutatása. Mindezeket hozzá kapcsoljuk a korábbi tananyaghoz. Mechanikából felhasználjuk a lendület-megmaradást, perdület-megmaradást, majd az energia megmaradást. Forgási,

mozgási, elektrosztatikus és gravitációs potenciális energiát is átismételjük. Ezek közben előkerül modern fizikából a fúzió fogalma is. A csillag életének a fázisait legkönnyebben a 25. ábra bemutatásával tudjuk összefoglalni.



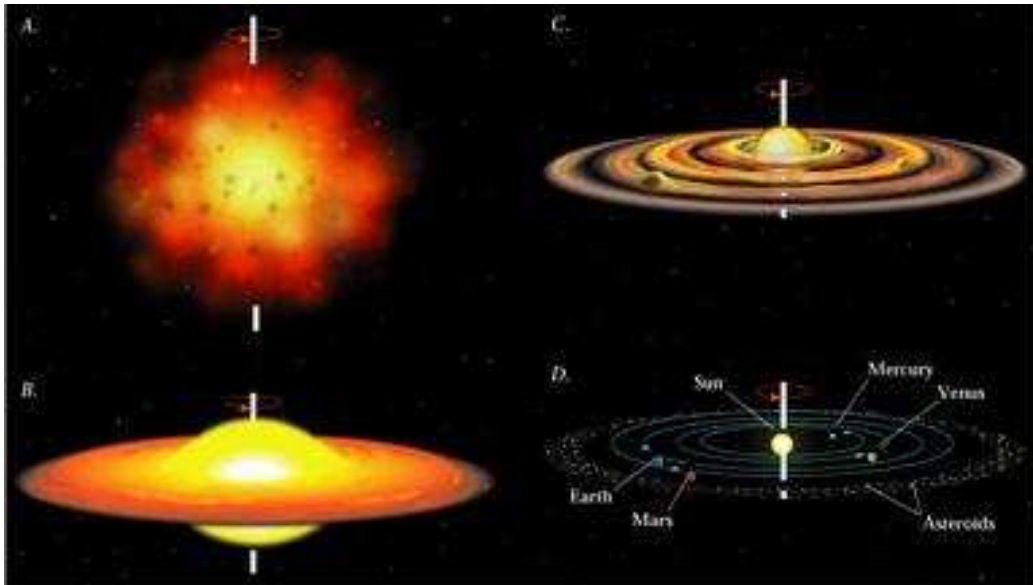
25. ábra. A csillagfejlődés folyamata

5.2.2. Elméleti háttér a tanórához

Az első csillagok az életüket hidrogén és hélium 3:1 tömegarányú keverékeként kezdik. Ezek a kis tömegű atomok az ősrobbanásban jöttek létre. A nagy tömegű gázfelhő a gravitáció hatására elkezd összehúzódní. Ez az összehúzódnás nem gömbszimmetrikus. A gázfelhő ellaposodik, ez teszi lehetővé a bolygórendszer kialakulását, ahogy az a 26. ábrán is látszik. Az összehúzódnó gáz, a felszabaduló gravitációs energia hatására felforrósodik, a benne lévő atomok ionizálódnak, és ezért elkezd világítani. Ezt az állapotot nevezzük protocsillagnak.

7. táblázat. *óravázlat*

Idő	Fogalom	Kulcspontok	Melyik régebbi tárgykörhöz csatlakozik?	Szervezési mód	Módszerek	Eszközök
4'	Bevezetés, a csillagfejlődés folyamatának bemutatása			Frontális	Előadás	Kép
3'	Protocsillag	Gravitációs összehúzódás	Gravitációs energia	Frontális	Előadás	Képek
5'		Hőmérséklet	Ekvipartíció	Egyéni munka	Feladatmegoldás	1. feladatsor
5'	Hidrogén „égés”	Gravitációs összehúzódás	Elektrosztatikus tasztítás	Frontális	Előadás	Nap energia termeléséről
5'		Sugárnyomás	Fúzió	Egyéni	Feladatmegoldás	bemutatott ábra.
3'	Hélium „égés”	Gravitációs összehúzódás		Frontális	Előadás	Képek
2'	Vörös óriás	3 alfa folyamat				
2'	Fehér törpe			Frontális	Előadás	Képek
5'	Szupernova		Impulzus megmaradás	Frontális	Előadás	Képek
5'	Neutroncsillag		Perdület megmaradás		Kísérlet	Labdasor
2'	Fekete lyuk			Frontális	Kérdve kifejtés	Képek
4'	Befejezés, az óra anyagának összefoglalása			Frontális	Előadás	Kép



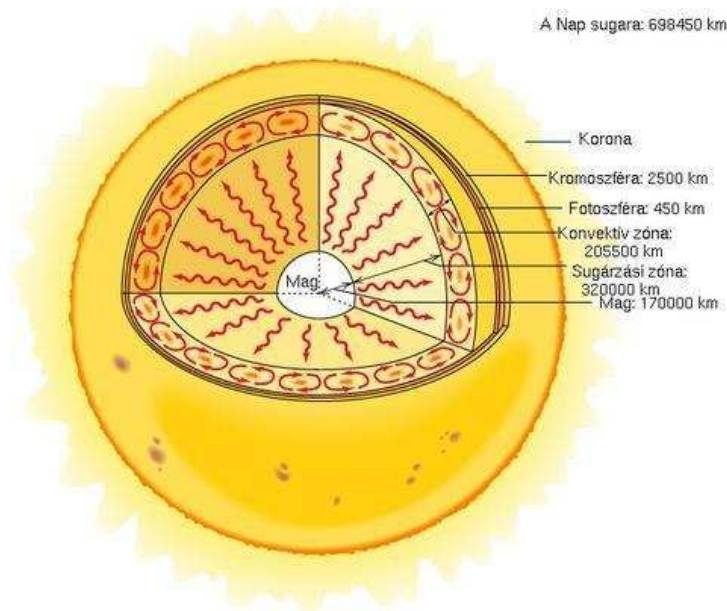
26. ábra. A Naprendszer kialakulása

Ha kellően nagy tömegű a születő csillag az összehúzódás tovább tart, és eközben tovább forrósodik a gázfelhő. Mikor a közepének a hőmérséklete eléri a 10-15 millió fokot, beindul a protonok héliummaggá történő fúziója. A magfúzió beindulásával születik meg a csillag. Két proton elektromosan taszítja egymást, ezért nem könnyű a fúzió. Ahhoz, hogy összekapcsolódjanak legalább 250fm távolságra meg kell közelíteniük egymást. Ez a távolság több mint százszorosa egy proton átmérőjének. A tényleges összeérésre azért nincs szükség, mert a proton is rendelkezik hullám tulajdonságokkal. A proton hullám, pedig sokkal messzebbre ér, mint ha golyónak képzeljük. Az elektromos taszítás ismeretében meg tudjuk mondani, mekkorának kell lenni a két részecske energiájának, hogy ennyire megközelítsék egymást. A részecskék energiájából pedig az ekvipartíció tétele alapján megmondhatjuk a hőmérsékletet.

A két proton fúziója energia felszabadulással jár, ami gamma fotonok formájában indul el a csillag felszíne felé, eközben többször ütközik a gravitáció által befelé húzott ionizált gázzal, kifelé lökve azt. Az ütközések miatt a csillag stabil állapotba kerül. A gravitáció befelé húzza a részeit, a bent fel-

szabaduló sugárzás kifelé nyomja.

A stabil sugárzási szakasznak (jelenleg a Napunk is ebben a szakaszban tart) a hossza a csillag méretétől függ. Minél nagyobb a csillag annál rövidebb életű. Ennek az az oka, hogy a nagyobb csillagok, nagyobb teljesítménnyel sugározva gyorsabban elfogyasztják a középpontjukban található hidrogént, a kisebbek tovább stabilak maradnak. Míg a Napunk stabil állapotának hossza kb. 9-10 milliárd év (most 4,5 milliárd éves), addig egy nála 20-szor nagyobb tömegű csillagnál ez a szakasz alig 5 millió év alatt véget ér.

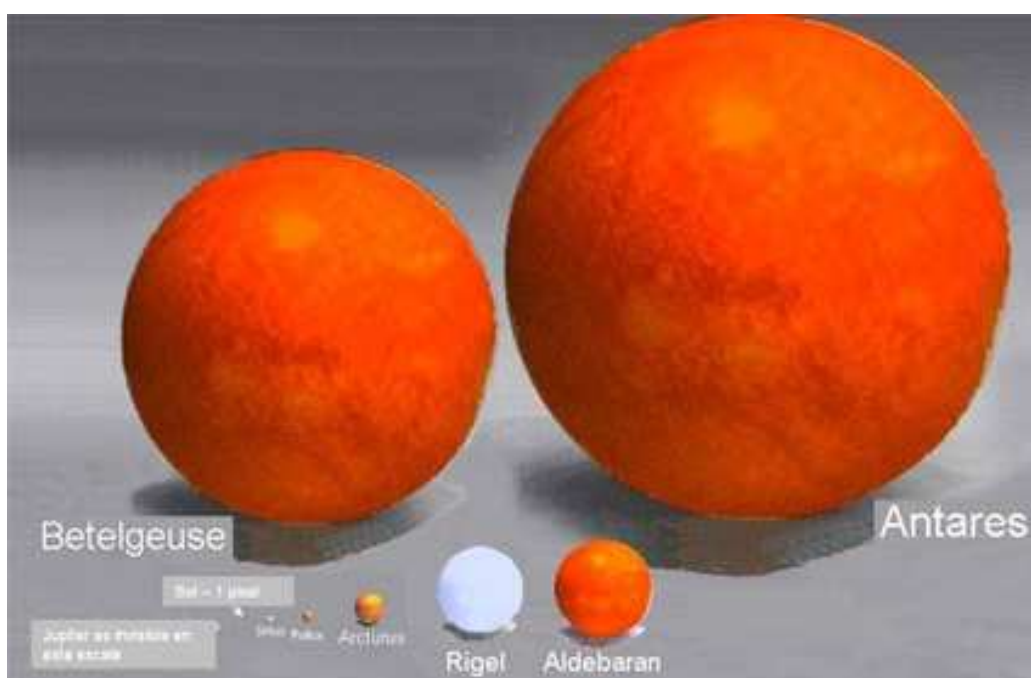


27. ábra. A Nap szerkezete

Mikor a hidrogénkészlet a csillag közepén elfogy, megszűnik a magfúzió, és vele együtt a sugárnyomás is. A gravitáció ismét összehúzza a csillagot. A központi rész az összehúzódás, és az ezzel járó felforrósodás következtében eléri a kb. 100 millió fokot. Ezen a hőmérsékleten beindul héliummagok berilliummagokká és szénatommagokká történő egyesülése. Mivel a berillium nem stabil, ezért gyorsan befog még egy He magot, hogy stabil szén keletkezzen. Ez az úgynevezett 3 alfa folyamat. (Alfa részecske = He atommag) Ez a folyamat sokkal nagyobb energia felszabadulással jár, mint a protonok

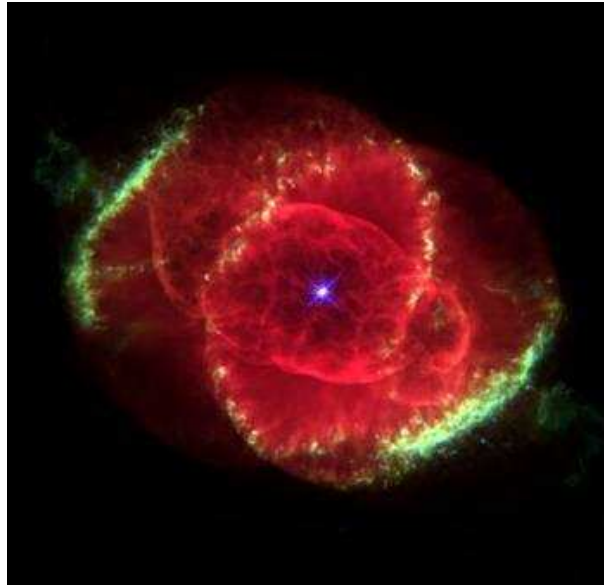
fúziója. A hatalmas energia-kisugárzás, hatalmas sugárnyomáshoz vezet, ami a csillag külsejét óriásira fújja. Ez a csillagok Vörös óriás állapota. A mi Napunk például akkora lesz, mint a Föld pályája, ezért nem csoda az óriás elnevezés. A vörös jelzőt pedig a színéről kapta, az óriásira megnövő külső felszín lehül, és az eredeti sárgás fehér színe vörösre vált.

A Naprendszerünkhöz legközelebb elhelyezkedő Vörös óriás a Betelguse (ld. 28. ábra)



28. ábra. Vörös óriások méretarányos képe

A hélium elégeése után újabb összehúzódás következik. Ezen a ponton ágazik el a csillagok további élete attól függően mekkora a tömegük. A kisebb tömegűek (mint a Nap is) legkülső burkukat már nem tudják visszahúzni, az távozik a világűrbe, és egy ködöt alkot (Ez a 29. ábrán is látszik). A ledobott burkot nebulának nevezzük. A maradék anyag pedig felveszik a fehér törpe állapotot. A kis tömeg miatt nem alakul ki bennük kellő hőmérséklet a nehezebb magok (C, O, N) fúziójához. A csillag magas hőmérsékleten fehéresen izzik, majd szép lassan kihül, és megszűnik láthatóvá válni.



29. ábra. *A macskaszem köd, közepében egy fehér törpével*

Ha csillag egy bizonyos tömeget meghalad (kb. a Naptömeg 7-8 szorososa), akkor eléggé összehúzódik, és megnő a közepén a hőmérséklet ahhoz, hogy a magok a vasig fuzionáljanak. Miután ez megtörtént, a további energia nyereség fúzióval nem lehetséges. Korábbi magfizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a ^{56}Fe -ban a legnagyobb az egy nukleonra jutó kötési energia! Az összehúzódás ismét megkezdődik. Ekkor már akkora súly nehezedik a csillag közepére, hogy az elektronokat a magokba préseli, és így a protonokat neutronokká alakítja. Ezzel egy hatalmas, neutronokból álló atommag sűrűségű anyag keletkezik. Ekkor az elektronok rendezetlen mozgásából származó nyomás hirtelen megszűnik, és a csillag külső részei az atommag sűrűségű belső részre zuhannak. Ez a belső rész már összenyomhatatlan, így a bezuhanó anyag úgy pattan róla vissza, mint egy labda a szilárd talajról. A visszaverődött anyag nagy része lökéshullámszerűen távozva kiszóródik a világűrbe. Ezt az anyag- és energiakiáramlást szupernóva-robbanásnak nevezzük. Ez az égbolton szabad szemmel is megfigyelhető rendkívüli fényességgel is járhat.

A robbanás energiájából kialakulnak a vasnál nehezebb elemek. Az, hogy a

Földön megtalálhatók a vasnál nehezebb elemek bizonyítja, hogy korábban a környéken történ egy szupernóva robbanás, ami legyártotta őket.

A visszamaradó szupersűrű kb. 10 km átmérőjű objektum látható fényt nem sugároz, viszont rádiótávcsövekkel érzékelhető. Sokan először ezeket a szabályos jeleket a földön kívüliek bizonyítékának tekintették, míg ki nem derült, hogy tulajdonképpen a szupernóva robbanás után visszamaradt gyorsan forgó neutroncsillagok. Pulzároknak nevezik őket. A pulzárt elképzelhetjük úgy mint egy óriási, gyorsan forgó mágnesset. Ez elektromágneses sugárzást (rádiójeleket) sugároz ki, amik rövid jelekként érkeznek meg a Földre. Ezekről a rövid impulzusokról kapták a nevüket.

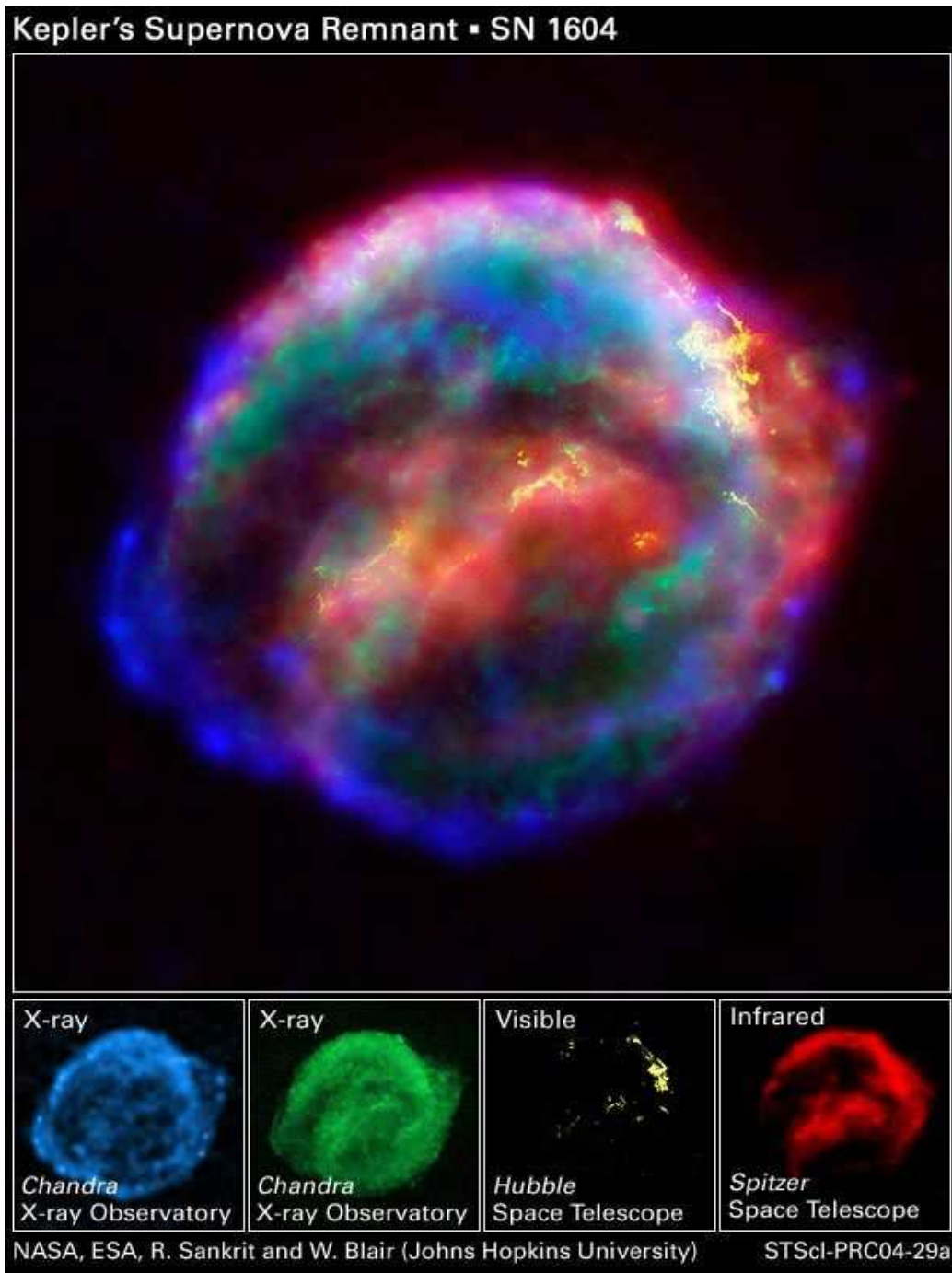
A harmadik lehetőség, a még korábbiakat is meghaladó csillagtömeg. A szupernova-robbanás előtti pillanatig ugyan az az életút, de a hatalmas bezuhanó tömeget már a maganyag sűrűség sem bírja visszapattintani. Az egész csillag összeroppan, és egy aprócska ponttá zsugorodik. Ekörül az objektum körül akkora a gravitációs mező, hogy a fény sem képes elhagyni, ezért a kapta a fekete lyuk elnevezést.

5.2.3. Feladatsorok a tanórai foglalkozáshoz

1. (a) Mennyi energia szabadult felt fel mikor a Napunk jelenlegi méretére húzódott össze?
(b) Mennyi jut ebből egy atomra?
(c) Mekkora hőmérsékletű gáznak felel ez meg?
2. Becsüljük meg mekkora sebességgel kell elindítani két H magot hogy azok 250fm-re megközelítsék egymást?
3. Mekkora fordulatszámú lenne a Nap, ha most 25,38 nap a forgásideje, és 140 km sugarúra nyomódna össze a teljes anyaga?

5.2.4. A tanórán bemutatatható kísérlet

Labdasor: Nagy labdán, közepes méretű, azon egy kicsi. Együtt elejtve őket, a kicsi visszapattanva a másik kettőről, magasra száll.



30. ábra. A Kepler szupernóva különböző frekvencia tartományokban felvett képei

5.2.5. A feladatok vázlatos megoldása, és kiegészítő megjegyzések a tanároknak

1. feladatsor

Mennyi energia szabadult felt fel mikor a Napunk jelenlegi méretére húzódott össze?

Az ismert gravitációs energia képlete ($E_{grav} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$), egy kissé módosul, méghozzá egy 3/5-ös faktorial. Tehát a diákok a következő képletet használhatják:

$$E_{grav} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \quad (7)$$

A 7. képlet a gravitációs potenciál $U_{grav} = -G \frac{m}{r}$ és a sűrűség szorzatának teljes térfogatra vett integráljából számolható ki, konstans sűrűséget feltételezve.

A Nap sugarával, és tömegével számolva körülbelül **$2,3 \cdot 10^{41}$ J** energia szabadult fel.

Mennyi jut ebből egy atomra?

Tegyük fel, hogy a Nap kezdetben 1/4 rész héliumból és 3/4 rész hidrogénből állt. Ekkor a Nap tömegéből, az átlagos moláris tömegből és az Avogadro-számból kiszámolhatjuk mennyi atom volt központi csillagunkban. Ez kb. $6,85 \cdot 10^{56}$ -nak adódik. Ebből az egy atomra jutó energia **$3,35 \cdot 10^{-16}$ J**. Ez 2,1keV-tal egyenértékű, ami messze túlszárnyalja, akár a hidrogén, akár a hélium ionizációs energiáját. Ha jut rá idő visszafelé kiszámolhatjuk, hogy az ionizációhoz mekkora sugár kell.

Mekkora hőmérsékletű gáznak felel ez meg?

Az ekvipartíció tételét felhasználva számolhatjuk. **$24,3 \cdot 10^6$ K**. Ez a közelítés hibája miatt már a Nap központi hőmérsékleténél is magasabbnak adódik.

2. feladatsor

Becsüljük meg mekkora sebességgel kell elindítani két H magot hogy azok 250fm-re megközelítsék egymást?

Centrális ütközést tételezünk fel, és az energia megmaradást használjuk fel. Kiinduló állapotban a protonnak csak mozgási energiája van, a forduló pontban (legközelebb egymáshoz) csak elektrosztatikus potenciális energiája.

$$\begin{aligned} E_{\text{végállapot}} &= E_{\text{kiindulás}} \\ E_{\text{pot}} &= E_{\text{mozg}} \\ k \frac{e^2}{r} &= \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned} \quad (8)$$

A 8. egyenletből a sebesség kifejezhető. A sebesség kb. $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -nak adódik.

3. feladatsor

Mekkora fordulatszámú lenne a Nap, ha most 25,38 nap a forgásideje, és 140 km sugarúra nyomódna össze a teljes anyaga?

A perdület megmarad, így a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség fordítottan arányos egymással. A szögsebesség a fordulatszámmal fordítottan arányos. Ezekből következik, hogy a fordulatszám, és a tehetetlenségi nyomaték egyenes arányosságban áll egymással, tehát elég kiszámolnunk milyen arányban áll a kezdeti tehetetlenségi nyomaték, a végsővel.

Egy gömb tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{\text{gömb}} = \frac{2}{5} M R^2 \quad (9)$$

Ebből látszik, hogy a sugárral négyzetesen arányos. A kitűzött feladatban a sugár 10^4 -ed részére csökkent, így a tehetetlenségi nyomaték, és a forgásidő is 10^8 -od részére csökkent. Tehát a forgásidő: **21 ms**, ami azt jelenti, hogy másodpercenként 45,6-ot fordulna.

5.3. Szakköri foglalkozás tervezése a Csillagfejlődés témában

5.3.1. Kiegészítő tananyag a szakköri foglalkozáshoz

A protocsillagnak halványan a fénye, hisz benne még „csak” a gáz ionizációjához elég a hőmérséklet. A fénykibocsájtást ugyanaz a jenség okozza, mit fénycsövek világítását, vagy a sarki fényt. Csak míg az utóbbiakban az elektronokat töltött részecskék árama szakítja le az atomokról, azalatt a protocsillagban az atomok egymáshoz való gyakori ütközése, ami leveri az elektronokat. A tanórán is említettük, hogy a gázfelhő nem úgy zsugorodik össze, mint egy leeresztő lufi, hanem először ellaposul, diszkoszszerűvé válik. Ennek a perdület és az energia megmaradás az oka.

A gömbszimmetrikusan zsugorodó felhő tehetetlenségi nyomatéka a sugár négyzetével egyenesen arányos. A perdület megmarad, így a szögsebesség fordítottan arányos a sugár négyzettel. A forgási energia egyenesen arányos a szögsebesség négyzetével, így fordítottan arányos R^4 -nel. Ezt az energiát a zsugorodáskor felszabaduló gravitációs potenciális energiának kellene fedezni. A gravitációs potenciál viszont $1/R$ -rel arányos. így látszik, hogy a homogén izotrop összehúzódás energetikailag nem lehetséges.

A pattogó gamma fotonok veszítenek energiájukból, így mire a Nap felszínére érnek, Így egy részük már látható fényként indul útjára a Föld felé. A pattogó gamma foton egy szép példája az elektromágneses sugárzás részecske természetének. Impulzussal és energiával rendelkezik, így képes „löködni” az ionizált gáz atomjait, és elektronjait.

Három alfa folyamat:

A két He magból kialakuló Be mag nagyon rövid élettartamú 10^{-16} s. Ezután szétesik ismét két alfa részecskére. Ez emberi léptékben elképzelhetetlenül rövid idő, viszont az atommagok világában nem annyira. Egy csillag belsőjében nagy a sűrűség, és nagyon gyorsan mozognak a részecskék. Két He atommag például 10^{-20} s alatt megy el egymás mellett. Ezt a két számot összehasonlítva látjuk, hogy 10000-szer annyi ideig vannak együtt, mint amilyen gyorsan elsuhanna mellettük egy harmadik. Tehát 10000 próbálkozásra

van idő, hogy ne csak mellette menjen el a 3. He hanem eltalálja. Az ütközéskor a harmadik He mag is befogódik, és kialakul a már stabil szén.

A fehér törpét az elektronok taszítása stabilizálja. Kémiából tanultuk az úgynevezett Pauli elvet, miszerint maximum két elektron tartózkodhat ugyanazon az elektron héjon. A csillagban ionizáltak az atomok, így nem beszélhetünk ugyanolyan elektronehéjakról, de a Pauli elv most is érvényes. Kettőnél több elektron nem lehet ugyanolyan állapotban. Ez a megkötés a modern fizika eszközeivel értelmezhető egyfajta nyomásként. A fehér törpében ez a nyomás tart ellen a gravitációs összehúzó erőnek.

Mivel a fekete lyukat nem lehet látni, ezért sokáig kételkedtek a létezésükben. Mára már vannak bizonyítékok a létezésükre. Honnan tudjuk, hogy vannak, ha nem láthatjuk őket? Például:

- Látnak olyan csillagokat az égen, amik nem önmaguk körül forognak. Ezeket jobban megfigyelve azt láthatjuk, hogy egy láthatatlan objektummal közös tömegközéppont körül keringenek.
- Másik lehetőség az észlelésre az, hogy a nagy gravitáció elhajlítja a fényt. Ez az elhajlás a megfigyelésekben úgy jelentkezik, hogy egy távoli csillagot időről időre máshol látunk az égbolton.

5.3.2. Feladatsorok a szakköri foglalkozáshoz

1. (a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka egy 1tonna tömegű 1 m sugarú gömbnek?
(b) Mekkora a nyomaték változás, ha a teljes anyag egy fele akkor sugarú gömbbé zsugorodna?
(c) Mekkora a változás, ha a teljes anyag egy 10 m sugarú diszkoszban helyezkedik el?
2. (a) A Földön, az úgynevezett napállandó $1,5 \text{ kW/m}^2$. Ez azt jelenti, hogy a Napunk másodpercenként, minden m^2 sugárzásra

merőleges Földfelszínre 1,5 kJ energiát sugároz. A Föld-Nap távolság ismeretéből, és a napállandóból határozzuk meg, mekkora teljesítménnyel sugároz a Nap!

- (b) Ha ezt a teljesítményt állandónak vesszük, mennyi energiát adott le eddig központi csillagunk?
- (c) Ez mennyi szén elégetésének felel meg?

5.3.3. A feladatok vázlatos megoldása, és kiegészítő megjegyzések a tanároknak

1. feladatsor

Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka egy 1tonna tömegű 1 m sugarú gömbnek?

A gömb tehetetlenségi nyomatékát már a 9. egyenletben leírtuk, ez a megoldás egy egyszerű behelyettesítés.

Mekkora a nyomaték változás, ha a teljes anyag egy fele akkor sugarú gömbbé zsugorodna?

Mivel a nyomaték R^2 -tel arányos, így az negyedére csökken.

Mekkora a változás, ha a teljes anyag egy 10 m sugarú diszkoszban helyezkedik el?

A diszkosz tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{diszkosz} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (10)$$

A tehetetlenségi nyomaték változás a gömb és a diszkosz nyomatékainak arányából számolható. Ebből meghatározható, hogy a diszkosz nyomatéka $5/4$ szerese a gömbének.

2. feladatsor

A Föld-Nap távolság ismeretéből, és a napállandóból határozzuk meg, mekkora teljesítménnyel sugároz a Nap!

A Földpálya sugarú gömb felszíne $2,8 \cdot 10^{23} m^2$. Minden m^2 -re 1370 W jut, így a teljes kisugárzás **$3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$**

Ha ezt a teljesítményt állandónak vesszük, mennyi energiát adott le eddig központi csillagunk?

A Nap kora $4,5 \cdot 10^9$ év. Ezt megszorozva a teljesítménnyel, kiszámolható, hogy eddig **$5,5 \cdot 10^{43} \text{ J}$** energiát adott le.

Ez mennyi szén elégetésének felel meg?

Egy átlagos kőszén fűtőértékkel ($30000 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$) számolva kijön, hogy a Nap eddigi teljes kisugárzott energiája **$1,8 \cdot 10^{36} \text{ kg}$** szén elégetésekor keletkezne. Összehasonlításképp megemlíthetjük, hogy ez a teljes Naptömeg milliószerosa.

5.4. Szakköri foglalkozás tervezése szupernova-robbanás témában

Elvégezzük a labdasoros kísérletet különböző paraméterek mellett. Változtatjuk a labdák számát, a tömegeket. Érdekes azt is vizsgálni, hogy mennyit változik a legfelső labda elpattanása, ha kiinduláskor nem értek össze a labdák.

A kísérletek és a számolások elvégzésével egy másfél órás szakköri foglalkozást is eltölthetünk. A mozgásokat legegyszerűbben egy digitális kamera és egy számítógép segítségével vizsgálhatjuk. A mozgó golyókról felvételt készítünk, és a videófilmet megfelelő program segítségével számszerűleg is kiértékelhetjük. A program kimenetként előállítja az egyes golyók út-idő; sebesség-idő; gyorsulás idő függvényeit. Ezekkel összehasonlíthatjuk a számolt értékeket, és végiggondolhatjuk az eltérések okait.

A számolások elvégzéséhez először nézzük meg mi is az elemi esemény ebben az ütközési sorozatban:

Felfelé halad egy M tömegű V sebességű labda, lefelé pedig egy m tömegű és v sebességű. Legyen a felfelé irány a pozitív, és tegyük fel, hogy ütközés után mindkét labda felfelé mozog.

Az impulzus és az energia megmaradás egyenletei:

$$\begin{aligned} MV - mv &= MV' + mv' \\ MV^2 + mv^2 &= MV'^2 + mv'^2 \end{aligned}$$

A megoldás egy másodfokú egyenlet mindkét változóra, melynek eredménye:

$$\begin{aligned} v' &= -v \quad ; \quad V' = V \\ v' &= \frac{(M - m)v + 2MV}{M + m} \quad ; \quad V' = \frac{(M - m)V - 2mv}{M + m} \end{aligned}$$

Eredményből látszik, hogy az első eset annak felel meg, mintha a két labda átment volna egymáson, mindenféle kölcsönhatás nélkül, a második pedig a visszapattanásnak. Számunkra a második eset jelent fizikai megoldást, hiszen szilárd tárgyakról beszélünk.

Vizsgáljunk speciális eseteket:

1. Egyenlő tömegű golyók:

$$v' = V \quad ; \quad V' = -v$$

Ez szintén olyan, mintha átment volna egymáson a két golyó, bár itt fizikailag sebességet cseréltek. Ha megkülönböztethetetlenek lennének, akkor ez megegyezne a másodfokú egyenlet nem fizikai megoldásával.

2. A két golyó sebességének nagysága azonos:

$$v' = \frac{3M - m}{M + m} v \quad ; \quad V' = \frac{M - 3m}{M + m} v$$

Ez az ütköző labdasor alsó két eleme esetén van így.

Az egyszerűség kedvéért először tekintsünk három labdát 12:4:1 tömegarányban. Mindegyik egységnyi sebességgel halad a pattanás pillanatában. Tehát az alsó kettő ütközésekor felhasználhatjuk az utolsó eredményt. Ebből kiszámolható, hogy a legalsó az ütközés után 9/13-dal halad tovább felfelé, a középső pedig 35/13-dal.

A következő ütközés a középső, és a felső között történik, itt már az általános képletet kell használnunk. Ebből a középső golyó ütközés utáni sebessége $79/65$ a felsőé $319/65$.

Végeredményként azt kapjuk, hogy mindhárom golyó felfelé mozog. $\frac{45}{65}$; $1\frac{14}{65}$; $4\frac{59}{65}$ sebességekkel, ha az eredeti sebességük egységnyi volt.

6. Függelék

6.1. Maxwell-Boltzman eloszlások tulajdonságai

Feltételezhetjük, hogy a reakciók bizonyos hőmérsékleti egyensúlyban zajlanak, ekkor a neutronok sebesség eloszlása, és a céltárgy magok sebesség eloszlása is Maxwell-Boltzman eloszlás, ugyanazon a hőmérsékleten. Ez az eloszlás hőmérséklet függő, és egyre normált.

$$\Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}} d\mathbf{v}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$$

Ha két azonos hőmérsékleten felvett Maxwell-Boltzman sebesség eloszlású részecskét reagáltatunk, akkor a relatív sebességük is ilyen eloszlású, ugyanazzal a hőmérséklettel, és a két részecske redukált tömegével. Ennek bizonyításához tekintsük a két részecske sebesség eloszlását:

$$\Phi(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 = \left(\frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}_1^2}{2kT}} d\mathbf{v}_1$$

$$\Phi(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2 = \left(\frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}_2^2}{2kT}} d\mathbf{v}_2$$

Térjünk át tömegközépponti rendszerbe: A tömegközéppont koordinátája \mathbf{R} sebessége \mathbf{V} ; a relatív koordináta \mathbf{r} relatív sebesség \mathbf{v} ;

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} - \frac{m_2}{M}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \frac{m_1}{M}\mathbf{v}$$

ahol $M = m_1 + m_2$, és bevezetjük a redukált tömeget $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, ami hasznos az áttérésben, mivel így

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = M\mathbf{V} + \mu\mathbf{v}$$

A szorzat eloszlás:

$$\Phi(\mathbf{v}_1)\Phi(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} e^{-\frac{m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2}{2kT}} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

Komponensenként kiírva a deriváltakat, a Jakobi-determináns egynek adódik, így $d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = d\mathbf{V} d\mathbf{v}$, emellett $(m_1 m_2)^{3/2} = M^{3/2} \mu^{3/2}$

Ezeket beírva az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\Phi(\mathbf{v}_1)\Phi(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \frac{M^{3/2} \mu^{3/2}}{(2\pi kT)^3} e^{-\frac{1}{2kT} M V^2 - \frac{1}{2kT} \mu v^2} d\mathbf{V} d\mathbf{v}$$

A hőmérsékleti átlagolás a változóra vett integrálást jelenti. Mivel ezen eloszlások egyre normáltak, így az egyik eloszlás integráljából csupán csak egy 1-es szorzó adódik, és megmarad a másik. Ezzel a relatív sebességek eloszlása, a tömegközéppont sebességére vett átlagolás után:

$$\Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu \mathbf{v}^2}{2kT}} d\mathbf{v}$$

Tehát a relatív sebességek eloszlása is Maxwell-Boltzmann eloszlás ugyanazzal a hőmérséklettel, és a redukált tömeggel.

Ezután nem kell minden egyes párra meghatározni a relatív sebességeket, hanem felírhatunk egy átlagos reakció rátát, hiszen tudjuk a relatív sebességek eloszlását.

6.2. A reakcióhálóban használt paraméterek

A következő táblázat tartalmazza a β -bomlási állandókat (λ), és a kiszámolt reakció rátákat az alkalmazott hőmérsékleteken:

A	λ	$\langle\sigma v\rangle/N_A$ $T_9 = 1$	$\langle\sigma v\rangle/N_A$ $T_9 = 3$	$\langle\sigma v\rangle/N_A$ $T_9 = 5$	$\langle\sigma v\rangle/N_A$ $T_9 = 8$	$\langle\sigma v\rangle/N_A$ $T_9 = 10$
56	0	6,98E-18	6,78E-18	6,20E-18	4,83E-18	3,69E-18
57	0	5,97E-18	3,97E-18	3,41E-18	2,76E-18	2,16E-18
58	0	3,23E-18	2,98E-18	2,63E-18	1,97E-18	1,50E-18
59	1,80E-07	4,34E-18	2,61E-18	1,97E-18	1,31E-18	8,92E-19
60	1,46E-14	1,23E-18	1,18E-18	1,18E-18	9,31E-19	6,26E-19
61	1,93E-03	2,15E-18	3,63E-18	4,06E-18	3,02E-18	1,91E-18
62	1,02E-02	6,45E-19	6,80E-19	7,62E-19	6,25E-19	3,87E-19
63	1,14E-01	1,36E-18	9,46E-19	6,87E-19	3,44E-19	1,80E-19
64	3,47E-01	4,01E-19	4,83E-19	6,01E-19	4,10E-19	1,72E-19
65	5,33E-01	2,06E-18	1,39E-18	8,54E-19	3,26E-19	1,60E-19
66	1,58E+00	4,11E-19	2,91E-18	8,89E-18	1,53E-17	1,06E-17
67	1,16E+00	6,15E-19	4,43E-19	2,77E-19	1,09E-19	5,27E-20
68	3,71E+00	5,06E-20	6,49E-20	9,57E-20	8,00E-20	3,50E-20
69	6,36E+00	2,32E-19	1,87E-19	1,36E-19	6,09E-20	2,95E-20

8. táblázat. A futatások paramétereit

Hivatkozások

- [1] V. M. Goldschmidt, Norske Vidensk. Skrifter, Mat. Nat. Kl. 4 (1937)
- [2] R. A. Alpher, H. Bethe, G. Gamow; The Origin of Chemical Elements, Phys. Rev. **73** (1948) 7
- [3] F. Hoyle, D. N. F. Dunbar, W. A. Wenzel, W. Whaling, Phys. Rev. **92** (1953) 1095
- [4] H. A. Bethe és C. L. Critchfield, Phys. Rev. **54** (1938) 248 és 862
- [5] E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, F. Hoyle, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 547
- [6] <http://theory.gsi.de/langanke/vorlesung11.pdf>
- [7] <http://theory.gsi.de/langanke/vorlesung12.pdf>
- [8] R. L. Bowers, R. Wilson, 1982, ApJ., **50**, 115
- [9] S. E. Woosley, J. R. Wilson, G. J. Mathews, R. D. Hoffman, B. S. Meyer 1994, ApJ., **433**, 229
- [10] M. Terasawa, K. Sumiyoshi, T. Kajino, G. J. Mathews, I. Tanihata, 2001, ApJ., **562**, 470
- [11] <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>
- [12] T. Rauscher és F.-K. Thielemann, Atomic Data and Nuclear Data Tables 75, 1-351 (2000)
- [13] http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/kerettanterv/korrekturas/gimnazium/g09_fizika.doc
http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/kerettanterv/korrekturas/szakkozepiskola/szk08_fizika.doc
http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/kerettanterv/korrekturas/szakiskola/szi11_fizika.doc