

Stirling motor modellezése

Simon Dávid Szabolcs

ELTE TTK Fizika B.Sc.

Konzulens: Dr. Horváth Ákos

Budapest, 2014.05.01.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1 A motor működése	1
1.2 Alkalmazási területek, példák	4
1.3 Kutatási előzmények, motiváció	7
1.4 Kutatási célok.....	9
1.5 Módszerek	10
2. Ideális eset szimulálása	15
2.1 Elméleti várakozások	15
2.2 Kezdeti értékektől való függés	17
3. A kívülről nem hajtott Stirling motor	20
4. Eredmények	26
5. Előrettekintés	28
6. Összefoglalás	28
Felhasznált irodalom	30

1. Bevezetés

A Stirling motorok működése és az egyre korszerűbb, speciális igényeknek megfelelő Stirling motorok tervezése korunk egyik fontos kutatási területe. Napjainkra, az olcsó és jó tulajdonságokkal bíró alapanyagok, valamint a gyártástechnika fejlődésének következtében a Stirling motorok alkalmazhatósága igen megnőtt.

Széles körű felhasználását előnyös tulajdonságainak köszönheti, melyek többek közt a halk és megbízható működése, jó hatásfoka és a széles hőmérséklet-tartományban való alkalmazhatósága.

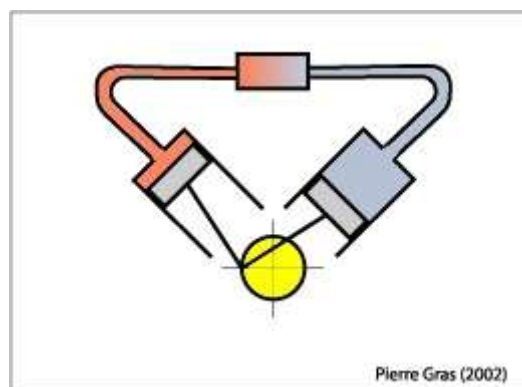
A motort Robert Stirling találta fel 1816-ban, ám az akkori technikai feltételek, felhasznált anyagok nem tették lehetővé a gyakorlatban is jó hatásfokkal működő, széles körben alkalmazható motor elkészítését.

1.1 A motor működése

A Stirling motor egy olyan hőtani gép, amely egy hideg és egy meleg hőtartályra csatlakoztatva a meleg tartályból a hidegbe periodikusan szállítja a hőt, aminek egy részét mechanikai munkává alakítja. Lehetséges a fordított irányú működtetés is, amikor mechanikai munka befektetésével a motor az egyik hőtartályból a másikba hőt juttat át.

Alapvetően három típusát különböztetjük meg: az alfa, a béta és a gamma típusokat.

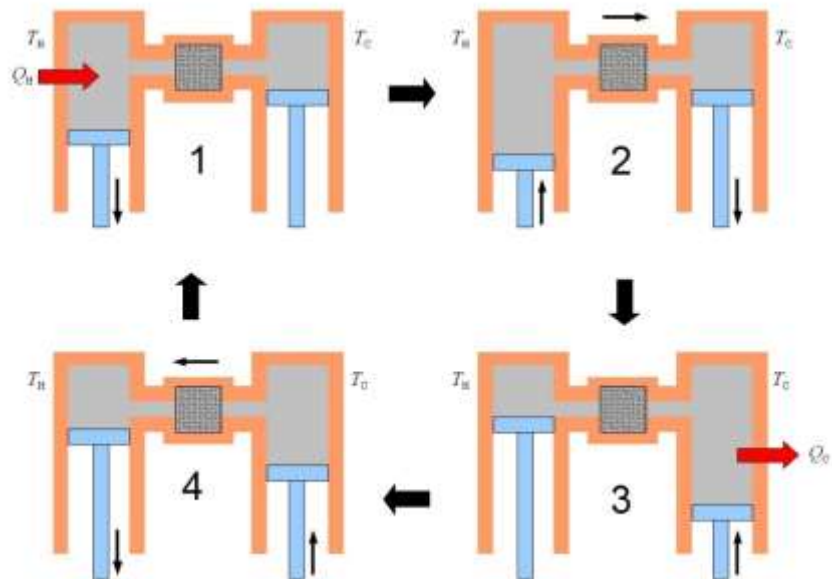
Az alfa típusnál a motor két dugattyúból áll, amelyek egymáshoz képest 90° -os szögben mozognak. (1. ábra) Az egyik dugattyú fala a meleg pontja a motornak, a másik dugattyúé pedig a hideg pontja.



1. ábra

Ez azt eredményezi, hogy a motorban lévő gáz melegszik a meleg ponton, amikor az ottani dugattyút kihúzzuk és hűl, amikor a hidegponton lévő dugattyút húzzuk ki. Mivel ez a két folyamat periodikusan zajlik le, a motorban lévő gáz is periodikusan melegszik fel és hűl le. Az így kialakult térfogatváltozás az, amit a motor a 90° -os fáziskülönbségnek köszönhetően mechanikai munkává képes alakítani.

A motor egy periódusát négy ütemre osztva a működése könnyen szemléltethető. (2. ábra)



2. ábra

1. ütem:

A gáz nagy része a meleg térrészben van, így felmelegszik, és ennek következtében kitágul. A tágulás hatására a meleg térrészbeli dugattyút kilöki. Ez a tágulás a hideg térrészbeli dugattyúval folytatódik, amely a meleg térrészbeli dugattyú mozgása miatt kifelé mozdul el, így megnövelve a térfogatot. Mivel a gáz eközben tovább melegszik, ezen a dugattyún is munkát végez.

2. ütem:

A gáz térfogata egészen addig nő, amíg a hideg oldali dugattyú is eléri a holtpontját. Ekkor a gáznak egyre nagyobb része kerül át a hideg oldalra, így lehül.

3. ütem:

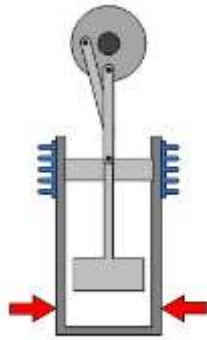
A gáz tovább hűl és csökken a térfogat. A meleg oldali dugattyú eléri a holtpontját.

4. ütem:

Miután a gáz elérte a minimális térfogatát, újból átkerül a meleg térrészbe, ahonnan a folyamat kezdődik előlről.

A béta és a gamma típusnál szintén két dugattyú van, de itt az egyik dugattyú a motor belsejében helyezkedik el, és nem illeszkedik pontosan a motor falához, mellette a gáz áramolni képes. Ennek a dugattyúnak a feladata a gáz terelése a hideg és a meleg térrész között, ezért elterjedt neve a terelődugattyú.

A motorban található egy másik dugattyú is, ami a tényleges térfogatváltozást előidézi. Ez a dugattyú az, amely a térfogatváltozásokat mechanikai munkává alakítja (munkahenger). A két dugattyú között itt is 90° -os fáziskülönbség van. (3. ábra)



3. ábra

Ennek a típusnak a működése hasonlóan négy ütemre bontható (4. ábra)

1. ütem:

A munkahenger már összenyomta a gázt, a terelődugattyú felfelé mozog, így a gáz átkerül a meleg térrészbe.

2. ütem:

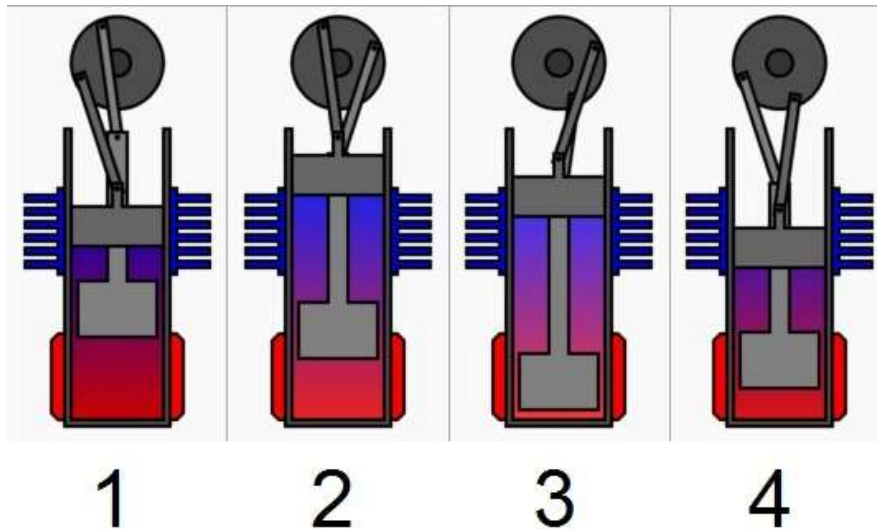
Mivel a munkahenger elérte az alsó holtpontját, ezután a gáz kitágul, miközben melegszik, amivel munkát végez. A terelődugattyú ezalatt éri el a felső holtpontját.

3. ütem:

A terelődugattyú átnyomja a gázt a hideg térrészbe, ami ennek következtében lehül. Eközben a munkahenger összenyomja a gázt, így az újból munkát végez.

4. ütem:

Ezután a munkahenger tovább csökkenti a térfogatot, a gáz hűl, mialatt a terelődugattyú eléri az alsó holtpontját. Miután a holtponton továbbhalad, a folyamat kezdődik előlről.



4. ábra

A különbség a béta és a gamma típus közt mindössze annyi, hogy a munkahenger a béta típusnál a gáztér falának közepén helyezkedik el, így a terelő dugattyú távtartója a munkahengeren keresztül jut be a motorba, míg a gamma típusnál a munkahenger nem közepén van, így a terelő dugattyú távtartója más helyen jut a motorba. Elméleti számítások szempontjából mindegy, melyik konstrukciót vesszük alapul a kettő közül. Egyedül a motor belsejében levő gáz áramlásai különböznek, de ezt most nem vesszük figyelembe. Korrekcióként vehetjük számba a távtartó rudak sűrűlódását a csatlakozások helyén, de mivel ez nem függ a mozgás sebességétől, ezért ez is megegyezik a két esetben.

A dolgozat a béta és gamma típusok szimulálásával foglalkozik, mivel ezek szélesebb körben, alacsonyabb hőmérséklet-különbségek mellett is jól alkalmazhatóak. Mint az később látható lesz, a szimuláció könnyen átalakítható az alfa típus szimulálására is.

1.2 Alkalmazási területek, példák

Egyik felhasználási területe a Stirling motoroknak a hűtés, mivel a befektetett mechanikai energiát jó hatásfokkal képes hasznosítani. Emellett az üzemeltetés során halk marad, ami bizonyos helyeken ugyancsak szempont. A halk hűtésre korábban elterjedt technológia – az adszorpciós hűtők alkalmazása – mára már visszaszorult, rossz hatásfoka, drága és környezetszennyező előállítás, valamint veszélyes üzemeltetése miatt.

A Stirling motoros hűtőre jó példa a Coleman Stirling Power Cooler 5726-750^[1], amelyet gépjárművekhez terveztek. Ennek megfelelően magas külső hőmérséklet mellett is képes üzemelni és kis fogyasztással, mindössze 48W-tal képes lehűteni 25 literes belső terét, akár -18°C-ra. Magas piaci ára (450-500 USD) miatt azonban nem elterjedt.

Másik példa a Twinbird nevű cég SC-UF01 ^[2]-es típusú Stirling motoros mélyfagyasztója, amely 320W-os fogyasztás mellett képes 80K hőmérséklet elérésére, ahol a hűtőtéljesítménye 10W-nak felel meg. Emellett hosszú élettartamú, gondozásmentes és halk.

A motor másik lényeges felhasználási területe az energiatermelés. Ezen a téren azért jelent áttörést, mert kisebb hőmérséklet-különbségeken is képes működni, mint a gőzturbinák és a működtetéséhez nem szükséges víz forralása. Így egyszerűbb rendszerek építhetők és több olyan környezeti hőforrást is használhatunk energiatermelésre, amelyeket a korábbi technikákkal még nem lehetett.

Ezért például a napenergia hasznosításában jelent egy ígéretes alternatívát a mostani technikához képest. A ma gyártott napelemek hatásfoka és élettartama igen alacsony, valamint az előállítási költségük igen magas. Ezért nem lehet gazdaságosan használni őket. Más alternatíva a naphőerőmű, ami a nap fókuszált fényének segítségével, vizet forralva hajt meg egy gőzturbinát. Ennek hátránya, hogy megépíteni igen költséges és szintén csak nappal képes az energiatermelésre.

A Stirling motor azért nyújt megfelelő alternatívát, mert kisebb teljesítményen is képes működni. Így a meghajtásához kevesebb fókuszáló tükör is elegendő, a napfényt hatékonyan alakítja át elektromos energiává, és napsütés hiányában könnyen melegíthető más hőforrással is. Ehhez szinte bármilyen tüzelőanyagot használhatunk, mivel a teljes égéshez szükséges feltételek adottak és az égés során nem keletkezik kár a motorban.

Az alábbi képen ilyen módon működő, napenergiás Stirling motor látható.



5. ábra

Érdemes megemlíteni, hogy bizonyos helyeken, ahol mechanikai energiára van szükség, a motor által előállított energia akár közvetlenül is felhasználható. Ilyen céllal alkalmazzák például víz pumpálására. Olyan helyen, ahol nem elérhető elektromos energia és bármilyen nyersanyag odaszállítása is költséges lenne, jól alkalmazható víz felhozatalára fűt kutakból napenergia hasznosításával.

A napenergián kívül a geotermikus energia hasznosítását is megkönnyíti a motor, mivel az esetek nagy részében a felszínre hozható víz hőmérséklete is 100°C alatt van.

Ma már nagyon kis hőmérséklet-különbségeken működő Stirling motorok is elérhetőek, ebben a rekordot az Anthony S. Senft Jr. által kifejlesztett motor tartja^[3], amely $0,5\text{K}$ hőmérsékletkülönbségből volt képes mechanikai energiát nyerni. Az ilyen, kisebb hőmérséklet-különbségen is működő motorok tették lehetővé azt, hogy a NASA (National Aeronautics and Space Administration, 1983) olyan eszközt fejlesszen ki, amely egy radioaktív izotóp bomlása során keletkező hőt hasznosítva tud hatékonyan energiát termelni, hosszú időre ellátva ezzel egy űrsiklót elektromos árammal és a meghajtáshoz szükséges energiával^[4]. Ezen fejlesztés előzménye egy olyan megoldás volt, ahol egy Peltier-hőelem segítségével állították elő az elektromos energiát.

Szintén az ilyen motorok tették lehetővé azt, hogy a számítástechnikában is alkalmazható legyen a Stirling motor olyan esetekben, ahol egy adott alkatrész hűtése szükséges. Lehet készíteni olyan motort, ami az alkatrész által megtermelt hő felhasználásával működik, és így egy propellert meghajtva vissza tudja hűteni az adott alkatrészt. Ezzel létrehozható olyan konstrukció, amely biztosítja az alkatelem aktív hűtését, de a működtetése nem igényel plusz energiát.

Ilyen eszközöket a gyakorlatban nem alkalmaznak. Egyelőre csak néhány darab létezik belőlük, demonstrációs célból. Két prototípust ismertettek, az egyiket az MSI készítette el^[5], ez az alaplapi chipet hűti, a másik pedig egy olyan eszköz, ami a processzort hűti. Ez utóbbit Sugár Krisztinával ketten fejlesztettük ki^[6]. (6.-7. ábrák)



6. ábra



7. ábra

A fent leírtak jól szemléltetik, hogy a motor alkalmazása igen széles körben lehetséges. Jobb és célzottan tervezett motorok segítségével több természetes energiaforrás kiaknázása válik lehetségessé. Ezen kívül a már meglévőket is hatékonyabbá lehetne tenni, és bizonyos eszközöket, mint például hűtőgépeket is lehetne jobb hatásfokon üzemeltetni, valamint melléktermékként keletkező hőt is lehetne hasznosítani bizonyos helyeken.

Ezeknek az első számú akadálya a Stirling motor előállítási költsége, ami az ezen a téren történt javulások ellenére is igen magas.

1.3 Kutatási előzmények, motiváció

Jelenlegi kutatásomat a fent említett Stirling motoros processzor hűtő kifejlesztése motiválta. Ezen korábbi munkánk mutatott rá arra, hogy bár a Stirling motorok működését elvben jól ismerjük, a technológiában rejlő lehetőségek és a széleskörű, újszerű alkalmazási területek miatt fontos, hogy a motorral behatóbban foglalkozzunk, főleg a gyakorlati alkalmazhatóság vonatkozásaiban.

Ezen korábbi kutatásunk, melyet Sugár Krisztinával közösen végeztünk, azt tűzte ki célul, hogy a számítógép processzorának a megfelelő hűtését egy Stirling motor segítségével úgy váltsuk ki, hogy a hűtés a későbbiekben egyáltalán ne igényeljen külön energia ráfordítást és lehetőleg gazdaságosan megalkotható legyen.

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy az eszköz megépítése során az alkatrészeket mind saját tervrajz alapján gyártattuk le, vagy mi magunk készítettük el, olcsó és könnyen hozzáférhető alapanyagokból. Ez alól mindössze a motor munkahengere jelent kivételt, amit egy Stirling motorok gyártásával foglalkozó külföldi cégtől rendeltünk meg, mivel magas követelményeknek kellett megfelelnie (légmentes zárás és alacsony sűrűdés).

Az eszköz működési elve igen egyszerű. A processzorra egy kisebb alumínium tömböt helyeztünk, amelynek az egyik felére hűtőbordákat, a másik felére pedig egy Stirling motort helyeztünk. Ez a tömb a hő elosztása mellett hő puffer szerepet is betöltött, aminek a célja az egyenletesebb működés biztosítása volt, ami a processzor esetenként ingadozó teljesítménye miatt volt célszerű. A Stirling motor meleg oldalát (alsó oldal) ez a tömb alkotta, a hideg oldal hűtését pedig további hűtőbordák alkották, amelyek a motor tetején helyezkedtek el.

A Stirling motor tengelyére egy ventillátort erősítettünk, amelyet úgy helyeztünk el, hogy a levegőt mind a processzoron lévő tömb hűtőbordáin, mind a motor hideg oldalán lévő hűtőbordákon keresztül áramoltassa. Mindezt úgy, hogy az áramlás iránya a hideg oldali bordák felől a melegebb, tömbhöz erősített hűtőbordák felé mutasson, így fenntartva az állandó hőmérséklet-különbséget a motor két oldala között.

Az általunk használt motor gamma típusú volt, amely a kis méret és az alacsony hőmérséklet-különbség miatt volt ideális.

Demonstrációs célból az eszközt felszereltük egy dinamóval is, amire egy Peltier-hőelemet csatlakoztattunk. Ennek a célja annak bemutatása volt, hogy a rendszer a processzor hűtésén kívül elektromos áramot is képes termelni az általa hasznosított termikus energiából.

Ezzel az eszközzel több versenyen is sikerrel szerepeltünk, eredményeink a következők voltak: Magyar Innovációs Verseny (Budapest, 2009): II. helyezés; Intel International Science and Engineering Fair (San Jose, CA, 2010): II. helyezés, különdíj (meghívás az Adolescent Science and Technology Innovation Contest-re Kínába); Adolescent Science and Technology Innovation Contest in China (Guangzhou, Kína, 2010): meghívott kiállító.

Ezen eredmények is azt mutatják, hogy a Stirling motorok kutatása még nem tekinthető lezártnak, e kutatások a társadalom számára hasznos eredményeket szolgáltathatnak a jövőben.

Az általunk fejlesztett eszköz esetében rá kellett jönnünk, hogy az szinte minden pontját tekintve eltér az ideális esettől és olyan paraméterek is sokat számítanak, amelyek az elméleti számítások során egyáltalán nem jelennek meg. Ezek közül egy érdekes tapasztalat, hogy a motor tetején található hőátadó felület (10 cm átmérőjű, 1 mm vastag alumínium lemez) a működés során megnövekedett belső nyomás hatására felpúposodott, ezzel a rá rögzített távtartó elemek eredeti távolságát 1-2 mm-rel megnövelte, aminek eredményeképp a távtartókból, a tengelyre erősített a csapágyak kiestek. Ezen kívül más olyan problémák is felmerültek, amelyek szükségessé teszik azt, hogy speciális, adott körülményekhez jól igazodó Stirling motorok működését is pontosan tudjuk szimulálni. Ilyen probléma volt például a terelő dugattyú távtartójának a gáztérbe történő bejuttatása úgy, hogy az hermetikusan zárjon és közben minimális legyen a súrlódása. Ugyanezt a problémát a munkahenger esetében egyáltalán nem sikerült megoldani, ezért volt szükséges ezt egy külső cégtől megrendelni. Így azonban ennek az alkatrésznek az ára tette ki a motor előállításának költségének közel 90%-át. Ha sikerülne például ezt az alkatrészt egy lényegesen olcsóbbra cserélni, akár a motor teljesítményének vagy hatásfokának rovására is, akkor ezzel lényegesen ki lehetne szélesíteni a felhasználhatósági körét. Így hatékonyabban tudnánk bizonyos eszközöket működtetni és akár a természeti erőforrásokat is hatékonyabban lennének képesek kiaknázni.

1.4 Kutatási célok

Kutatásom célja a motor működésének mélyebb megismerése, és az alkalmazás szempontjából fontos paramétereinek pontos meghatározása abból a célból, hogy könnyebben és költségkímélőbben lehessen speciális igényeknek megfelelő motort tervezni. Céлом továbbá, hogy a tervezés során lehessen számolni olyan paraméterek megváltoztatásával, amelyek a motort magát is olcsóbbá tehetik. Ehhez fontos, hogy az ideálistól eltérő, a valóságost minél inkább megközelítő motor működését legyen lehetőség meghatározni.

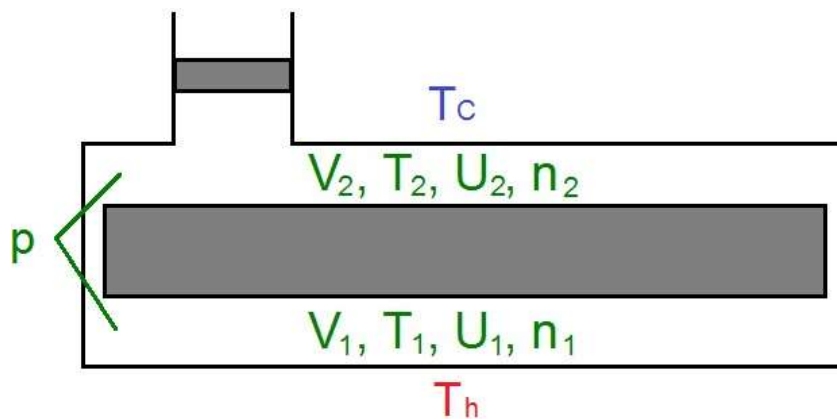
A kutatás során szeretném megállapítani, hogy az egyes korrekciók milyen mértékű eltérést mutatnak az ideális motorhoz képest, és hogy egy valódi motor működése a korrekciók figyelembe vétele nélkül mennyiben különbözik az ideális esettől.

Ezen kívül szeretnék egy olyan szimulációs programot megkonstruálni, ami mindezeket az információkat tartalmazva, széles körben alkalmas egy Stirling motor szimulálására, segítve ezzel annak megtervezését.

1.5 Módszerek

Ahhoz, hogy a motor működését a lehető legpontosabban le tudjam írni, általános hőtani alapegyenleteket vettem alapul, amelyeket illesztettem a motor paramétereire. A pontos levezetést az 1. melléklet tartalmazza, itt csak a gondolatmenet ismertetésének céljából írom le a vázlatos levezetést. Az alkalmazott közelítéseket ezt követően fogom diszkutálni.

A motor felépítését a következő kép jelöli vázlatosan:



8. ábra

Itt a betűk jelentése a következő:

Az indexek a nekik megfelelő (1, 2) térrészre vonatkozó értékeket jelölik.

T: hőmérséklet

V: térfogat

U: belső energia

n: részecskeszám

p: nyomás

A cél egy olyan egyenletrendszer megkonstruálása, amelynek alakja a következő:

$$\frac{dT_1}{dt} = f_1 \left(T_1, T_2, V_1, V_2, \frac{dV_1}{dt}, \frac{dV_2}{dt} \right) = g_1(T_1, T_2, t)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = f_2 \left(T_1, T_2, V_1, V_2, \frac{dV_1}{dt}, \frac{dV_2}{dt} \right) = g_2(T_1, T_2, t)$$

Azért érdemes ezt az alakot használni, mert a térfogatokat a két dugattyú állása határozza meg, amelyet mint kényszerfeltételt adhatunk meg a motorhoz. A T értékek megadása pedig azért előnyös, mert ezekből minden más érték könnyen számolható, és ezek felírásával mind a két térrész jól jellemezhető.

Ehhez tartozik minden időpillanatban tizenhat paraméter, amelyek a következők: $p_1, p_2, n_1, n_2, T_1, T_2, V_1, V_2, dp_1, dp_2, dn_1, dn_2, dT_1, dT_2, dV_1, dV_2$

Ebből T_1, T_2, dT_1, dT_2 maradhat az egyenletrendszerben, V_1, V_2, dV_1, dV_2 pedig megadható külső kényszer segítségével. Így marad nyolc független változó, amelyhez ennek megfelelően nyolc egyenlet felírása szükséges.

Felírhatjuk a gáztörvényt mindkét térrészre t és t' időpillanatban:

$$p V_1 = n_1 R T_1 \quad (1)$$

$$p' V_1' = n_1' R T_1' \quad (2)$$

$$p V_2 = n_2 R T_2 \quad (3)$$

$$p' V_2' = n_2' R T_2' \quad (4)$$

Térjünk át időbeli megváltozásokra!

$$T_1' - T_1 = dT_1 \quad (5)$$

$$T_2' - T_2 = dT_2 \quad (6)$$

$$p' - p = dp \quad (7)$$

$$n_1' - n_1 = dn_1 \quad (8)$$

$$n_2' - n_2 = dn_2 \quad (9)$$

Innen:

$$dpV_1 + p dV_1 = dn_1 R T_1 + n_1 R dT_1 \quad (10)$$

$$dpV_2 + p dV_2 = dn_2 R T_2 + n_2 R dT_2 \quad (11)$$

Ebből a t időpillanatra vonatkozik négy egyenlet: (1), (3), (10), (11).

Ezen kívül ismert még a következő négy egyenlet is:

$$p_1 = p_2 \quad (12)$$

$$dp_1 = dp_2 \quad (13)$$

$$n_2 = N - n_1 \quad (14)$$

$$dn_1 = -dn_2 \quad (15)$$

Ahol $N = n_1 + n_2 = \text{állandó}$, a motorban lévő összes gázcsepe.

Így ezzel a nyolc egyenlettel elméletileg az egyenletrendszer megadható a kívánt alakban.

Határozzuk meg a nyomást és a részecskeszámot a megengedett paraméterekkel!

$$p = NR \frac{T_1 T_2}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \quad (16)$$

$$n_1 = N \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \quad (17)$$

$$n_2 = N \frac{T_1 V_2}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \quad (18)$$

Felírva az első főtételt mindkét térrészre:

$$\frac{f}{2} d(n_1 T_1) = Q_1 + W_1 + K_1 \quad (19)$$

$$\frac{f}{2} d(n_2 T_2) = Q_2 + W_2 + K_2 \quad (20)$$

Itt Q , az adott térréssel közölt hőmennyiségek értékeit a motor paraméterei tartalmazzák, ezek a következők:

$$Q_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) \quad (21)$$

$$Q_2 = \alpha_2 (A_1 - A_2) (T_C - T_2), \quad (22)$$

ahol α a hőátadási tényező az egyes oldalakon, T_h a meleg oldal, T_c a hideg oldal hőmérséklete, A_1 a motor hideg oldalának területe, A_2 pedig a munkahenger keresztmetszete. (Így a meleg oldal területe a kettő különbségként adódik a 8. ábrán szemléltetett elrendezés miatt.)

Az adott térrészen végzett munka (W) és annak kémiai potenciálja (K) ismert összefüggések alapján meghatározható:

$$W_1 = -pdV_1 \quad (23)$$

$$W_2 = -pdV_2 \quad (24)$$

$$K_1 = \mu_\theta dn_1 \quad (25)$$

$$K_2 = \mu_\theta dn_2 \quad (26)$$

Ahol μ_θ azt jelöli, hogy éppen melyik térrészben lévő gáz kémiai potenciálját kell figyelembe venni.

Átírva a (21), (22) egyenleteket:

$$\frac{f}{2} R n_1 dT_1 + \frac{f}{2} R dn_1 T_1 = Q_1 + W_1 + K_1 \quad (27)$$

$$\frac{f}{2} R n_2 dT_2 - \frac{f}{2} R dn_2 T_2 = Q_2 + W_2 + K_2 \quad (28)$$

Mivel $dn_1 = -dn_2 = dn$, ezért $K_1 = -K_2$, és ezen kívül ismert, hogy

$$\mu_\theta = \frac{f}{2} R T_\theta. \quad (29)$$

Itt T_θ ismét azt jelöli, hogy melyik térrészből melyikbe áramlik a gáz, ennek megfelelően az értéke:

$$T_\theta = \begin{cases} T_1, & \text{ha } dn < 0 \\ T_2, & \text{ha } dn > 0 \end{cases} \quad (30)$$

Ahhoz, hogy ismerjük T_θ értékét, fejezzük ki dn -t ismert változók függvényeként:

$$dn = \frac{NT_1 T_2 V_1 V_2}{(T_1 V_2 + T_2 V_1)^2} \left[\frac{dT_2}{T_2} - \frac{dT_1}{T_1} + \frac{dV_1}{V_1} - \frac{dV_2}{V_2} \right] \quad (31)$$

Mivel ebben dT -s tagok szerepelnek, az egyenletrendszer végső alakjában a dn -es tagokat minden helyen át kell írni.

Ezeket figyelembe véve Q , W és K értékei beírhatóak az egyenletbe:

$$\frac{f}{2} R n_1 dT_1 + \frac{f}{2} R dn_1 T_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) - p dV_1 + \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (32)$$

$$\frac{f}{2} R n_2 dT_2 - \frac{f}{2} R dn_2 T_2 = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - p dV_2 - \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (33)$$

Ezekbe behelyettesítve és bevezetve a $z_0 = \frac{NT_1 T_2 V_1 V_2}{(T_1 V_2 + T_2 V_1)^2}$ jelölést, az egyenletek végleges

formája a következő:

$$\frac{f}{2} R (n_1 - z_0) dT_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) - \left(p + \frac{f}{2} R \frac{T_1}{V_1} z_0 \right) dV_1 + \frac{f}{2} R T_\theta dn + \frac{f}{2} R T_1 z_0 \frac{dV_2}{V_2} - \frac{f}{2} R \frac{T_1}{T_2} z_0 dT_2$$

$$\frac{f}{2} R (n_2 - z_0) dT_2 = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dV_1}{V_1} - \left(p - \frac{f}{2} R \frac{T_2}{V_2} z_0 \right) dV_2 - \frac{f}{2} R T_\theta dn + \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dT_1}{T_1}$$

Ezeket formálisan megoldva az egyenletrendszer alakja a következő lesz:

$$a_{11}dT_1 = a_{12} + a_{13}dV_1 + a_{14}dV_2 + a_{15}dT_2 \quad (34)$$

$$a_{21}dT_2 = a_{22} + a_{23}dV_1 + a_{24}dV_2 + a_{25}dT_1, \quad (35)$$

ahol a_{ij} változók a T-k és V-k függvényei, valamint függenek a motor paramétereitől is.

Ezekhez illeszttem a motor paramétereit a következőképpen:

$$V_1 = \left[\frac{H-M}{2} + x_1(t) \right] A_1 \quad (36)$$

$$dV_1 = A_1 \dot{x}_1(t) \quad (37)$$

$$V_2 = \left[\frac{H-M}{2} - x_1(t) \right] A_1 + [h_0 + x_2(t)] A_2 \quad (38)$$

$$dV_2 = -A_1 \dot{x}_1(t) + A_2 \dot{x}_2(t), \text{ ahol} \quad (39)$$

H: a gáztér magassága, amiben a terelődugattyú mozog,

M: a terelődugattyú magassága,

x_1 : a terelődugattyú kitérése a középállástól mérve,

x_2 : a munkahenger kitérése a középállástól mérve.

x függvények a következők:

$$x_1(t) = amp_1 \sin(\omega t) \quad (40)$$

$$x_2(t) = amp_2 \cos(\omega t) \quad (41)$$

Látható, hogy az alfa típus szimulálása csupán annyiban különbözik, hogy a $V(t)$ függvényre más kényszer felírását teszi szükségessé.

A szimulációhoz az egyenletrendszert numerikusan oldottam meg, amihez a negyedrendű Runge-Kutta módszert használtam. A programot úgy terveztem meg, hogy az egyes lépések után a T értékeken kívül a p, V, Q, n, és W értékeit is írja ki file-ba, a további számítások céljából. Ezek segítségével könnyen elkészíthetők az egyes esetek p-V diagramjai, számolható a teljesítmény és a hatásfok.

A számolás során több ponton közelítést alkalmaztam. Mivel ezek a valóságban nem teljesülnek, különböző korrekciók bevezetésével javítható az egyenletrendszer pontossága.

A következő közelítéseket alkalmaztam:

1. A nyomás a motor belsejében minden pillanatban homogén, a dugattyúk mozgásának sebességéből adódó nyomásbeli inhomogenitásokat, áramlásokat elhanyagoltam.

2. A terelő dugattyú melletti térrészt nem vettem figyelembe a térfogatok számolásánál.
3. A motor belsejében ideális gáz van, ezt a reális gáz állapotegyenletével tudjuk korrigálni.
4. Ennek megfelelően, az egyes térrészekben a hőmérséklet homogén. Ahhoz, hogy ezt korrekcióba vegyük, ismernünk kell az egyes térrészekben az áramlásokat, vagy egy általános formulát kell találnunk a hőmérséklet térfogaton belüli eloszlására.
5. A hőtartályok hőmérséklete nem változik, könnyen korrekcióba vehetjük a többi környezeti tényező (például hőtartály külső melegítése, hűtése) ismeretében.
6. A két térrész között hőátadás csak keveredés útján történik. A terelő dugattyún keresztül, illetve amellett, amikor az álló helyzetben van, nincs hőátadás. Ezt korrekcióba vehetjük egy effektív Q tag segítségével: $Q_D = \alpha_D A_{eff}(T_2 - T_1)$
7. A dugattyúk szinuszosan mozognak, de x függvények helyére beírva más függvényeket, ezt megfelelően korrigálhatjuk.

Először még egyik korrekciót sem figyelembe véve vizsgáltam a motor működését.

Mivel még egy korrekciót sem vettem figyelembe, ennek az egyenletrendszernek a megoldásával az ideális motor működését szimulálom, ami már jól ismert. Ennek ellenére fontosnak tartottam ezt az esetet is vizsgálni, egyrészt a szimuláció helyességének ellenőrzése szempontjából, másrészt olyan paraméterek meghatározásának céljából, amikről az elméleti modellek nem tesznek említést. Ilyen például a motor működésének vizsgálata úgy, hogy azt különböző kezdeti feltételekkel indítom el.

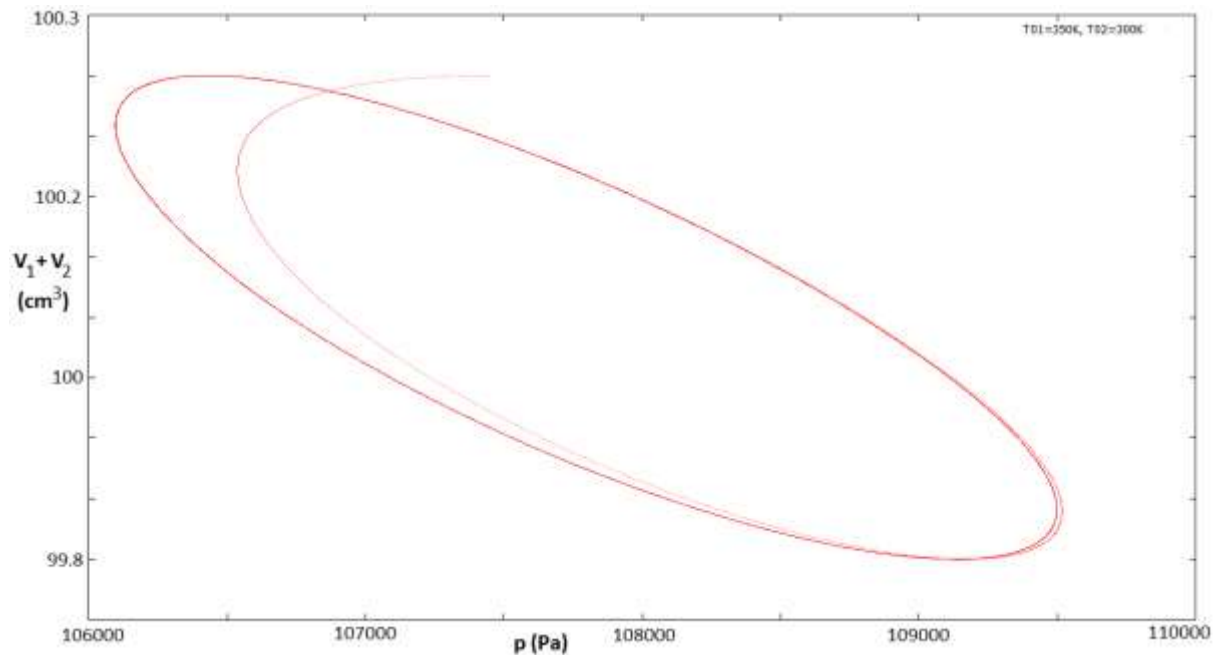
Ezen kívül becslést tudok tenni arra vonatkozólag, ha a terelő dugattyú nem éri el a tartály alsó és felső falát.

2. Ideális eset szimulálása

2.1 Elméleti várakozások

A szimuláció során elvárt, hogy a motor periodikus működést mutasson. Ennek megfelelően a szimulációk során minden periódusban ugyanazt a p-V diagramot kell kapnunk. Ez persze csak akkor igaz, ha a motor beállt egy egyensúlyi állapotba, mivel a kezdeti értékeket szabadon megválaszthatjuk. Kezdetben a motor még nem egyensúlyi viselkedést fog mutatni,

amit szintén tükröznie kell a szimulációnak. Ellenőrzésképpen tehát kirajoltam egy adott összeállítás p-V diagramját, ami a várakozásnak megfelelően alakult. Ez látható a 9. ábrán.



9. ábra

A szimuláció során a kezdeti értékeket $T_{0,1}=350\text{K}$ -nek és $T_{0,2}=300\text{K}$ -nek vettem, a motor paramétereit a következők voltak:

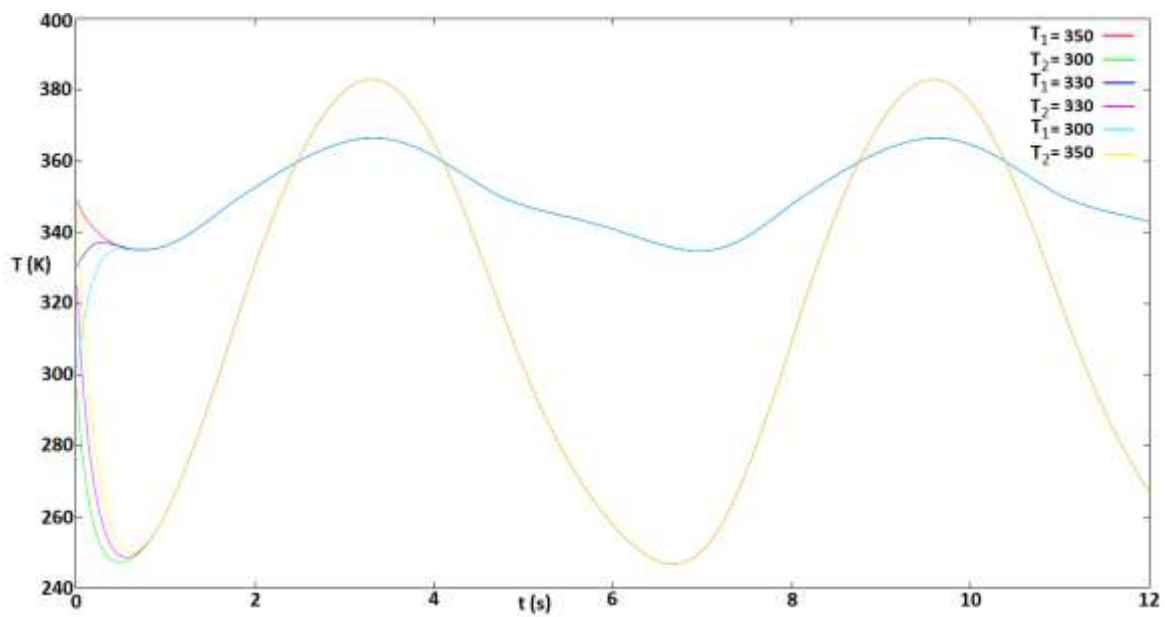
$\alpha_1 = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$	a hőátadási tényező a meleg oldalon
$\alpha_2 = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$	a hőátadási tényező a hideg oldalon
$A_1 = 0,01 \text{ m}^2$	a gáztér aljának keresztmetszete
$A_2 = 0,002 \text{ m}^2$	a munkahenger keresztmetszete
$M = 0,01 \text{ m}$	a terelődugattyú magassága
$\text{amp}_1 = 0,004 \text{ m}$	a terelődugattyú amplitúdója
$\text{amp}_2 = 0,0001 \text{ m}$	a munkahenger amplitúdója
$H = 0,02 \text{ m}$	a gáztér magassága
$h_0 = 0 \text{ m}$	a munkahenger egyensúlyi helyzetének magassága
$N = 0,00401 \text{ mól}$	a gáztérben lévő összes részecske anyagmennyisége
$f = 5$	a gáz szabadsági fokainak száma
$T_h = 350 \text{ K}$	a meleg oldal hőmérséklete
$T_c = 300 \text{ K}$	a hideg oldal hőmérséklete
$w = 1 \text{ 1/s}$	a dugattyúk körfrekvenciája

2.2 Kezdeti értékektől való függés

Érdekes kérdés, hogy adott paraméterek és változó kezdeti feltételek mellett a motor viselkedése hogyan alakul.

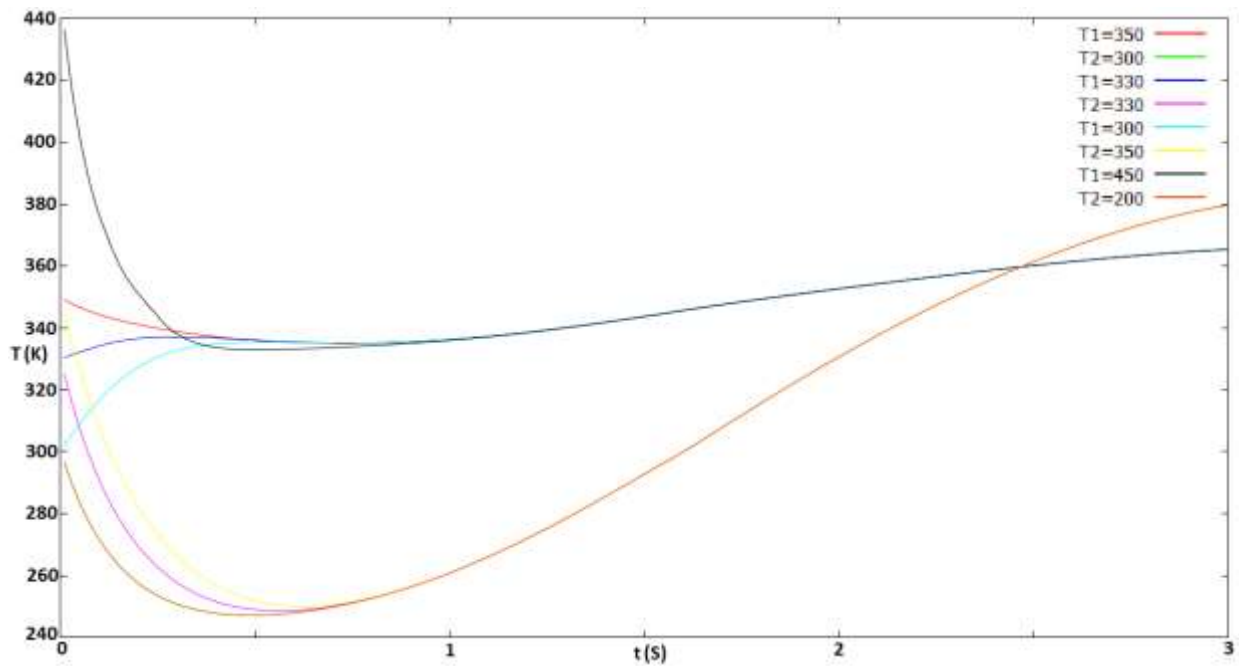
Ennek vizsgálatára a motor belsejében lévő térrészekhez különböző kezdeti hőmérsékleteket adtam meg. A motor többi paraméterét nem változtattam, ezek megegyeznek a fent említettekkel.

A következő ábrán láthatóak az egyes kezdeti értékekhez tartozó T_1 és T_2 hőmérsékletek.



10. ábra

Látható, hogy a hőmérsékletek már egy periódus alatt beállnak, és a különböző kezdeti értékekkel elindított szimulációk már ugyanazokat az értékeket adják. Hogy jobban látható legyen a beállítás, a következő ábrán kirajzoltam az első periódus elejét.



11. ábra

Megfigyelhető továbbá az ábrákon, hogy a hőmérsékletek olykor kívül esnek a motor hideg- és melegpontja által határolt intervallumon. Ez azért lehetséges, mert ebben az esetben a motort forgatva munkát végzünk rajta.

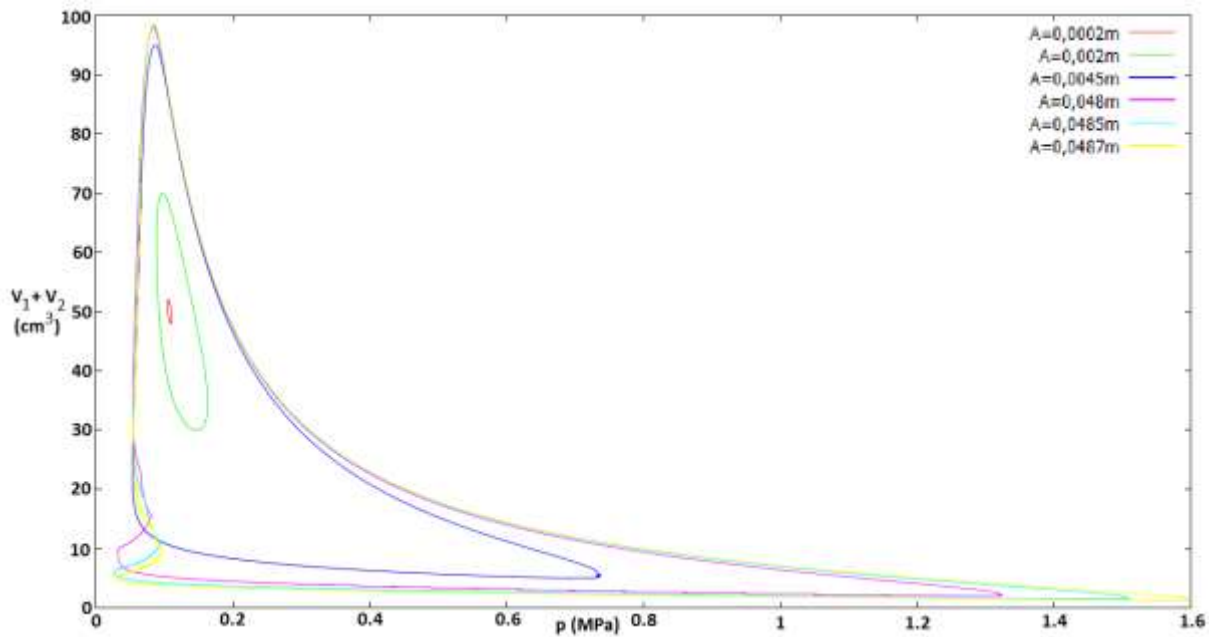
Megfigyelhető továbbá ebben az elrendezésben, hogy hogyan befolyásolja a motor működését a munkahenger amplitúdója. Ennek vizsgálatához először úgy változtattam a munkahenger amplitúdóját, hogy közben a terelő amplitúdóját 0-nak vettem.

A beállításokat az előzőekhez képest a következőképpen módosítottam:

$$w = 2 \text{ 1/s}$$

$$\text{amp2} = 0$$

A következő ábrán láthatóak a különböző amplitúdókhoz tartozó p-V diagramok:

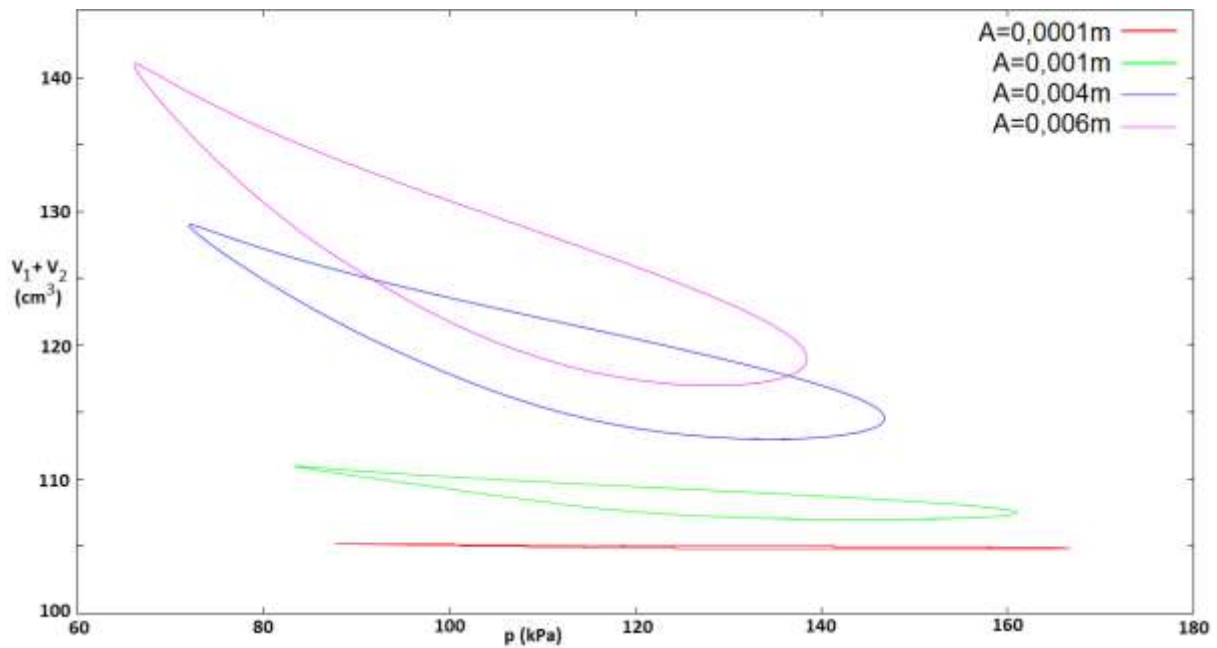


12. ábra

Ebben az esetben, bár a terelő dugattyú nem mozgott, a munkahenger mozgása miatt mégis áramlott mellette a gáz. Ezt azért fontos megemlíteni, mert ekkor hő is áramlik a meleg oldalról a hideg oldal felé. Így magyarázható a nagyobb amplitúdóhoz tartozó görbék bal alsó részén a térfogat és a nyomás egyszerre történő növekedése, ugyanis ezen a szakaszon a munkahenger éppen kifelé kezd el mozogni. Ekkor a meleg oldalra előzőleg átnyomott gáz hőt vesz fel, ami miatt megnő a nyomása. Mivel a munkahenger ekkor még lassan mozog, az általa okozott nyomáscsökkenés kisebb, mint a melegedés által okozott nyomásnövekedés.

Ezután megvizsgáltam, hogyan változik a p-V diagram abban az esetben, amikor a terelő dugattyú amplitúdója nem nulla, az értékét 0,004m-nek állítottam be. Ez az amplitúdó majdnem a maximális megengedett kitérésnek felel meg, így teljesen más viselkedést várok a motortól, mint az előző esetben.

A különböző amplitúdókhoz tartozó p-V diagramok a következő ábrán találhatóak:



13. ábra

Látható, hogy a motor által végzett hasznos munka nő a munkahenger amplitúdójának növelésével. Természetesen nem növelhetjük akármekkora mértékben az amplitúdót, mert így a különböző alkatrészek sűrűlódásából adódó veszteség is nagyon megnőne, és a motor méretének is lényegesen nagyobbak kéne lennie.

3. A kívülről nem hajtott Stirling motor

Mivel a motort a gyakorlatban sok helyen úgy használják, hogy a két oldala között hőmérséklet-különbséget hoznak létre, és ebből a motor segítségével mechanikai munkát nyernek, ezért hasznos ennek a bonyolultabb esetnek a vizsgálata. Ami a gyakorlat szempontjából fontos, az a motor teljesítménye, hatásfoka és frekvenciája, amely az adott körülmények között kialakul, így ezekkel mindenképp érdemes foglalkozni a továbbiakban.

Ahhoz, hogy a motor működését vizsgáljam ebben az esetben, meg kell engedni, hogy a fordulatszáma változzon. Továbbá érdemes áttérni az idő helyett szögelfordulásra, mint változóra, ezzel tapasztalat szerint a szimuláció is stabilabban képes futni.

A fordulatszám megváltozását a motor által végzett munka okozza. Ha a mechanikai veszteségektől eltekintünk, akkor a munkatétel deriválásából a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\theta \omega d\omega = p dV = p (dV_1 + dV_2)$$

Ennek az egyenletnek a megoldásához szükségünk van egy kezdeti ω értékre, amit minden esetben megadok.

A φ szögelfordulásra áttérve átírhatjuk az eredetileg kapott egyenleteket. Ezek alakja a következő lesz:

$$\frac{f}{2}R(n_1 - z_0) dT_1 = \alpha_1 A_1(T_H - T_1)/\omega - (p + \frac{f}{2}R \frac{T_1}{V_1} z_0) dV_1 + \frac{f}{2}R T_\theta dn + \frac{f}{2}RT_1 z_0 \frac{dV_2}{V_2} - \frac{f}{2}R \frac{T_1}{T_2} z_0 dT_2$$

$$\frac{f}{2}R(n_2 - z_0) dT_2 = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2)/\omega - \frac{f}{2}RT_2 z_0 \frac{dV_1}{V_1} - (p - \frac{f}{2}R \frac{T_2}{V_2} z_0) dV_2 - \frac{f}{2}R T_\theta dn + \frac{f}{2}RT_2 z_0 \frac{dT_1}{T_1}$$

Ehhez vegyük hozzá a fenti egyenletet a következő alakban:

$$d\omega = \frac{p(dV_1 + dV_2)}{\theta\omega}$$

Így az előzőtől alig különböző egyenletrendszer kaptam, amit szintén a negyedrendű Runge-Kutta módszerrel oldottam meg.

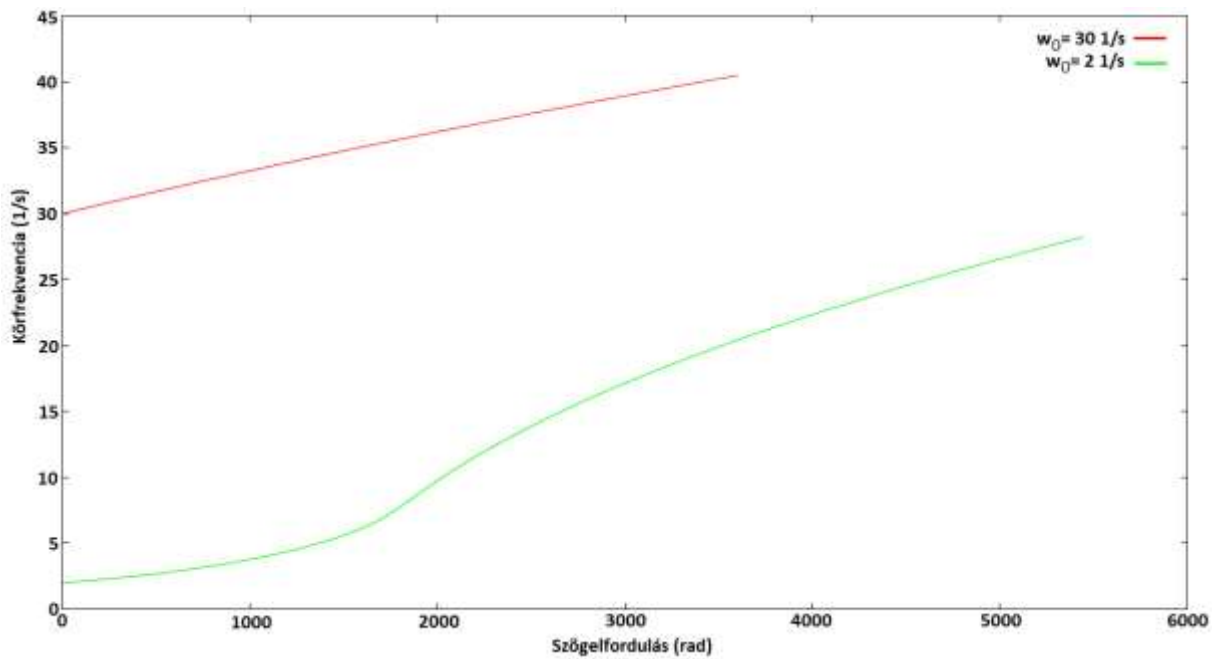
Ez az alak azért is hasznos, mert így könnyen vezethetünk be mechanikai veszteségből adódó korrekciókat, mivel azokat csak le kell vonni az ω megváltozásából.

Először érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor még nem vezetünk be korrekciókat.

Mivel a motort ebben az esetben nem fékezi semmilyen külső erő, és minden periódusban munkát végez a gáz, ezért várhatóan nem lesz olyan egyensúlyi frekvenciája, amire beállna. Viszont, mivel egy idő után a periódusok hossza csökken, és a gáznak kevesebb ideje van hőfelvételre és hőleadásra, ezért lehetséges, hogy a fordulatszám egyre kevésbé fog növekedni.

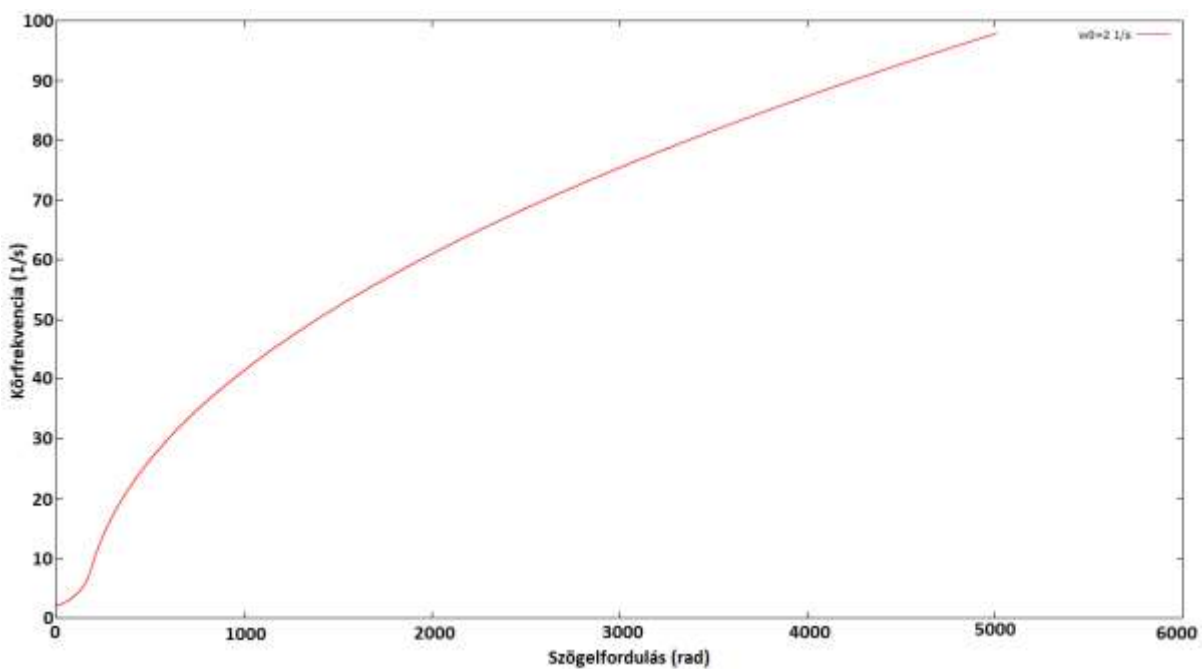
Az előző konfigurációkhoz képest a motor paramétereit nem változtattam meg. A kezdeti körfrekvenciát most 2 -, illetve 30 1/s -nak vettem, hogy a különböző frekvenciatartományokat is megvizsgáljam, ahol még érvényes az a közelítésünk, miszerint a motor belsejében a nyomás homogén, áramlások pedig nincsenek.

A körfrekvenciák alakulását a két esetben a következő ábra mutatja:



14. ábra

Látható, hogy a fordulatszám mindkét esetben nő. A 2 1/s körfrekvenciával indított motor esetében látható, hogy az adott paraméterek mellett a motor fordulatszáma 7 1/s körfrekvencia értéknél elkezd gyorsabban növekedni, majd ezután ismét csökken a növekedés léptéke. Sajnos ebből nem megállapítható, hogy az így kapott függvénynek van-e korlátja. Ahhoz, hogy ezt megállapítsam, megnéztem hosszabb időkre is a függvényt. Ez a következő ábrán látható:



15. ábra

Itt jobban látszik, hogy hosszú időkre a függvény folyamatosan nő; nem látható, hogy egy fix értékhez tartana. A későbbiekben fogok vizsgálni olyan eseteket, ahol van egyensúlyi frekvencia, ezekkel összevetve látható lesz a különbség ennek a függvénynek a menetéhez képest.

A valóságban minden esetben van mechanikai energia-veszteség. Ennek a legfontosabb esetei a súrlódás, a közegellenállás és a rendszerből mesterségesen kivett energia. A súrlódás esetében általában a terelő dugattyú távtartójánál a legjelentősebb a korrekció, mivel ennek a tartály falán úgy kell átmennie, hogy a rögzítés légmentes legyen. Ugyanígy jelentős ez a tag a munkahenger falánál, ahol a légmentes szigetelés szintén elvárt.

A közegellenállás vizsgálata azért jelentős, mert annak nagysága a fordulatszámmal arányosan nő, ezért amennyiben nincs energia-kicsatolás a rendszerből, akkor várhatóan ez a tag fogja megakadályozni, hogy a motor fordulatszáma egy adott érték fölé menjen. Mivel egy adott ω -t elérve ennek a tagnak a mértéke egyenlő lesz a gáz által végzett munkával, ez mindenképp felső határt szab ω -ra. Ezen kívül a közegellenállás jelentős szerepet játszhat a motor működésében, mivel a gáztér belsejében a terelő dugattyú mozgása gyors.

Ezt a két tagot a következőképpen vettem figyelembe az egyenletrendszer felírásában:
Súrlódás esetén:

$$d\omega = \frac{p(dV_1 + dV_2)}{\theta\omega} - \mu$$

Azért használtam ezt az alakot, mert maga a súrlódási erő nem függ a súrlódó felületek egymáshoz képesti sebességétől, és az iránya minden esetben olyan, hogy a motort fékezi. Ezen kívül minden periódusban konstans erőt jelent, a holtpontoktól eltekintve, amikor az alkatrészek nem súrlódnak egymással.

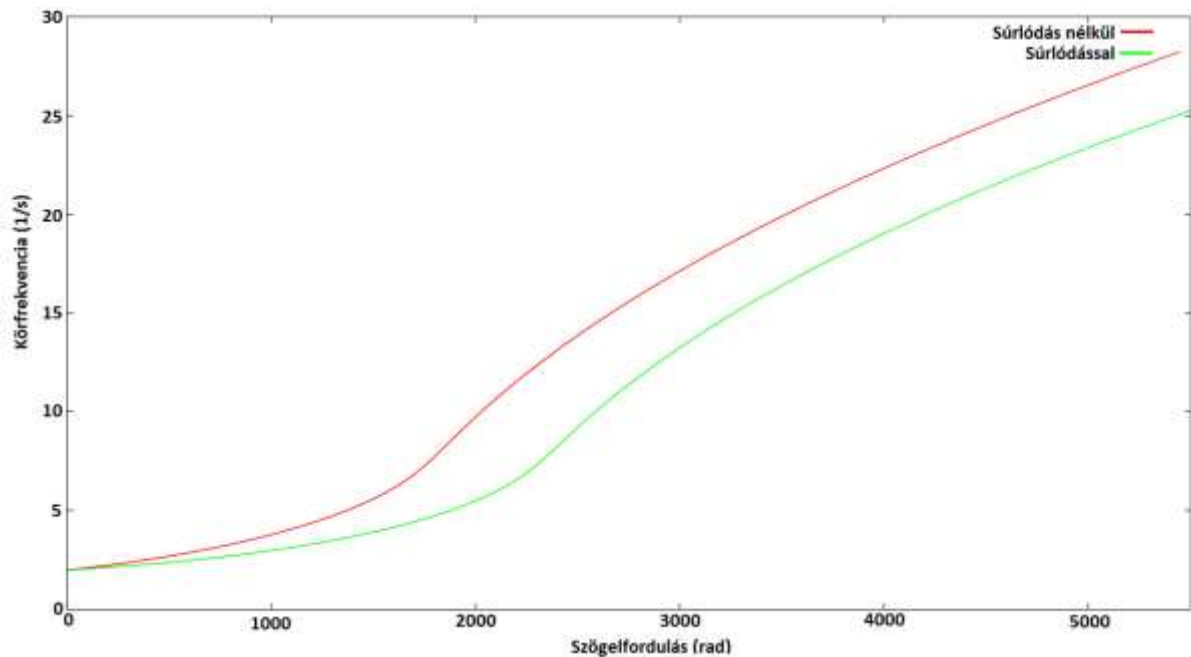
A közegellenállás figyelembevételéhez a következő összefüggést írtam fel:

$$d\omega = \frac{p(dV_1 + dV_2)}{\theta\omega} - \rho\omega,$$

ahol ρ -ba beleértettem az alakfaktort és a viszkozitást is.

Először a súrlódási tagot vizsgáltam meg. Várhatóan ez nem változtatja meg a fordulatszám függvényének menetét, csak eltolja azt. Lényeges azonban, hogy amennyiben egy bizonyos frekvencia alatt indítjuk el a motort, akkor ez a tag teljesen meg fogja állítani.

A motor paramétereit változatlanul hagytam, a kezdeti körfrekvenciát 2 1/s -nak vettem és a μ súrlódási tagot $0,0005 \text{ 1/s}^2$ -nek választottam. A következő ábrán látható a súrlódásos és súrlódás nélküli eset:

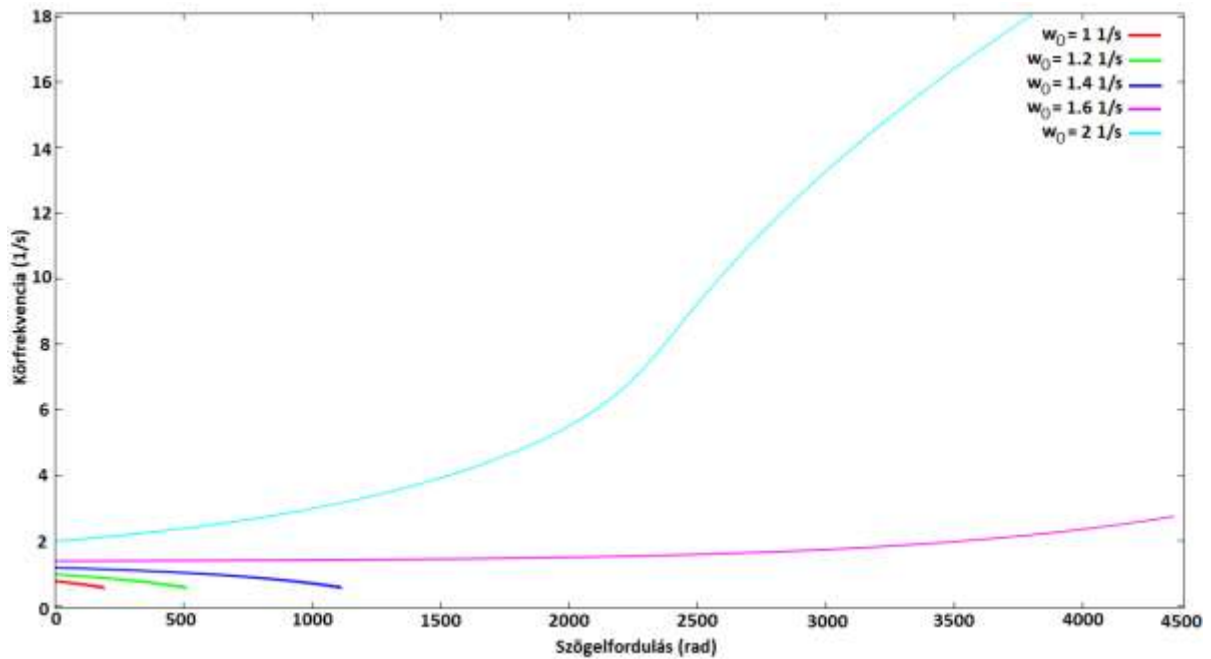


16. ábra

Látható, hogy a két függvény hasonló, tehát a várakozásnak megfelelő a súrlódási tag eredménye.

Azt is vizsgáltam, hogy van-e olyan határfrekvencia, ami alatt a motor megáll. Ehhez ugyanazokat a paramétereket használtam, mint az előzőekben, a kezdeti körfrekvenciát pedig $0,8$ és 2 1/s között választottam meg.

A szimuláció eredményei a következő ábrán láthatóak:

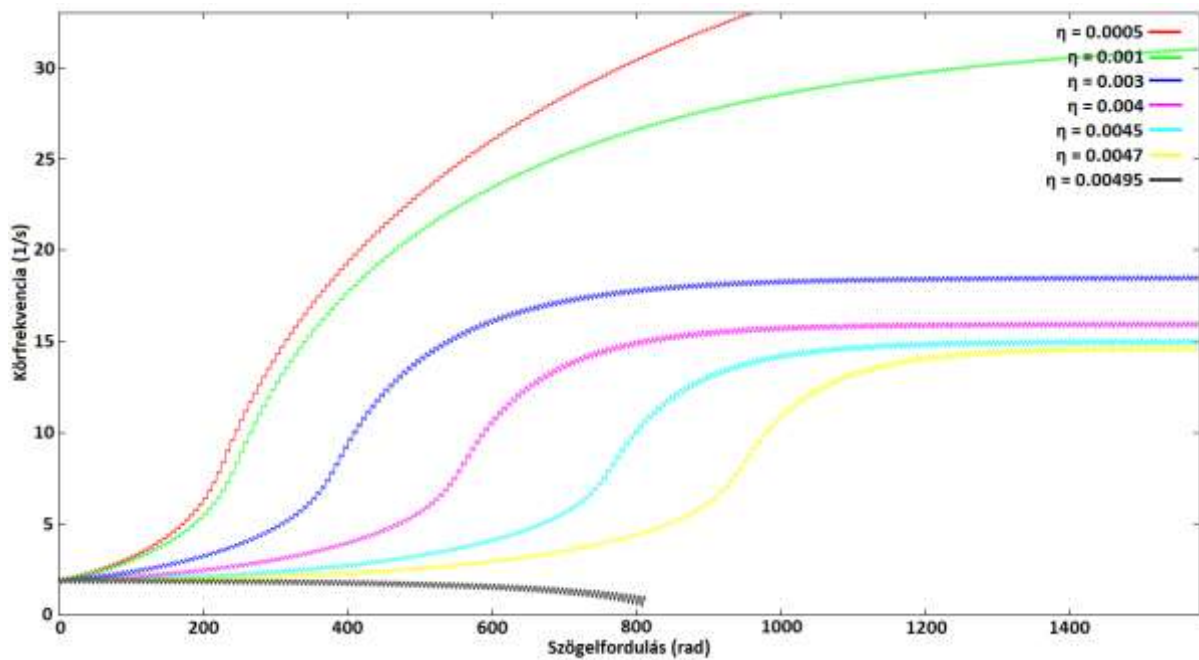


17. ábra

Látható, hogy létezik ilyen határfrekvencia, ahogy ezt vártuk.

A közegellenállás vizsgálatánál azt várom, hogy a motor a különböző közegellenállási együtthatók esetében különböző fordulatszámra áll be. Ennek vizsgálatához az eddigi paramétereket használtam, és a motort 2 1/s körfrekvenciával indítottam el.

Az eredmények a következő ábrán láthatóak: η



18. ábra

Megfigyelhető, hogy ebben az esetben is van olyan határfrekvencia, ami alatt a motor megáll, e fölött pedig a várakozásnak megfelelően a különböző együtthatókhoz tartozó körfrekvencia értékek egy-egy egyensúlyi helyzetbe állnak be.

A fordulatszám arányos terhelés azért is fontos, mert ha a motor segítségével elektromos áramot szeretnénk termelni, akkor – mivel ez szintén a sebességgel arányos terhelés –, ez is arányos lesz a fordulatszámmal.

4. Eredmények

A fenti eredmények mutatják, hogy az általam írt program alkalmas a Stirling motorban lezajló folyamatok szimulálására. A kapott értékek megfelelnek az elméleti várakozásoknak, és az empirikusan megfigyelhető jelenségeket is jól visszaadják.

Ez azt mutatja, hogy a program a valóságnak megfelelő értékeket adja.

A különböző szimulációk során kapott eredmények lehetővé teszik, hogy a segítségükkel egyszerűen és gyorsan számoljuk a motor működésére jellemző, fontos paramétereket. A p-V diagram segítségével könnyen számolhatunk mechanikai munkát és hatásfokot. A felvett és leadott hő mennyiségét a program szintén kiírja, ami fontos a gyakorlati alkalmazás szempontjából.

Mivel a motor paramétereit tetszőlegesen adhatjuk meg, ezért a program segítségével könnyen tervezhetünk egy olyan motort, amely az általunk megadott körülmények között a lehető legjobban működik. Megadható a hideg és meleg oldal hőmérséklete, az ezekre az oldalakra jellemző hőátadási tényezők, a motor méretei és sok más olyan paraméter, ami a megvalósítás szempontjából fontos lehet. Megmondható például az is, hogy egy adott konstrukció esetén milyen kezdeti nyomás alkalmazása lehetséges, hogy a működés közben kialakuló nyomás értéke ne haladja meg azt az értéket, amit a motor alkatrészei már nem képesek elviselni.

A program alkalmas Stirling motoros hűtőgép szimulálására, ami abból a szempontból fontos, hogy megállapíthassuk, hogy egy adott hatásfokot illetve teljesítményt hogyan lehet elérni úgy, hogy a motor megépítéséhez minél kevesebb és olcsóbb alapanyagot használunk fel. Vizsgálható továbbá, hogy a hideg és meleg oldal hőátadási tényezője mennyire meghatározó a működés szempontjából, illetve nagyobb nyomás alkalmazása mellett megengedhető-e egy nagyobb súrlódási tag, ami adódhat abból, hogy a nagyobb nyomás elviselése érdekében szorosabb illeszkedés kell a munkahengernél a dugattyú és a fal között, valamint azon a ponton, ahol a terelődugattyú a tartály falán áthalad.

Ezen felül a kívülről nem hajtott motor esetét is jól tudjuk szimulálni, ahol még ennél is fontosabb szerepet kapnak a különböző korrekciók. Az elvégzett szimulációk során a motor hideg és meleg pontjai közti hőmérséklet-különbség 50K volt, ami viszonylag kicsi, mivel ilyen hőmérséklet-különbség esetén a Stirling motor messze a legalkalmasabb hőerőgép, amivel mechanikai energiát tudunk előállítani. Ugyanakkor az ilyen alacsony hőmérséklet-különbségen is működni képes Stirling motorok sok kihívást jelentenek, pontosan a súrlódásból és egyéb veszteségből adódó korrekciók miatt, ugyanis ezeknek a tagoknak a teljesítménye ilyen esetekben megközelíti a motor hasznos teljesítményét. Emiatt sok esetben a kis súrlódás elérése a motor előállításának legdrágább részét képezi. A bevezetőben is említett, általunk megépített Stirling motor anyagárának nagyjából 90%-át egy olyan munkahenger tette ki, ami szinte súrlódásmentes mozgást biztosít amellet, hogy légmentesen szigetel.

Mivel egy olyan munkahenger építése, ami ennél csak kissé nagyobb mechanikai veszteséget ad, lényegesen olcsóbban hozzáférhető, ezért fontosnak tartom azt, hogy egy ilyen, nem tökéletes alkatrész megléte is szimulálható legyen.

A program segítségével könnyen számításba vehetőek ezek a korrekciók, akár egyszerre többféle tag is vizsgálható, valamint a program megadja az ilyen tagok teljesítményét is. Ezt

azért fontos kiemelni, mert így optimalizálható egy már meglévő motor esetében a kivett teljesítmény.

Vizsgálható továbbá, hogy egy adott frekvencián hogyan érhető el a lehető legnagyobb leadott teljesítmény, ami fontos az elektromos áram termelése szempontjából, mivel ezen a területen a jól meghatározott frekvencia alapkövetelmény.

5. Előrettekintés

Véleményem szerint az általam írt program további érdekes fejlesztések és kutatások alapja lehet. Érdekes további korrekciókat bevezetni a szélesebb körben való alkalmazhatóság miatt.

Elsőként szeretnék áttérni ideális gáztól reális gázra a számításokban, ugyanis abban az esetben, ha a motorban fázisátalakulás következik be, sokkal nagyobb teljesítmény érhető el. Ennek a leírásához elengedhetetlen a reális gáz modelljének használata, de fázisátalakulás hiányában is pontosabbá teheti az eredményeket bizonyos esetekben.

Ezen kívül olyan korrekciók alkalmazását is tervezem, amelyek várhatóan a közegellenálláshoz hasonlóan szintén alkalmasak arra, hogy a motor egyensúlyi frekvenciáját meghatározzák. Ilyen korrekció lehet például az, hogy ha a motor hideg- és melegpontjának a hőmérséklete változhat. Sok esetben a hideg oldal hűtését hűtőbordákkal oldják meg, melyeknek a hőmérséklete a külső hőmérsékleten kívül a motor teljesítményétől is függ. Érdekes és fontos kérdés, hogy egy ilyen korrekció előidéz-e egy egyensúlyi frekvenciát.

Továbbá tervezem egy olyan Stirling motor megépítését, mely képes a napfény hasznosítására. E motor tervezéséhez a fent említett programot szeretném használni, a lehető legköltséghatékonyabb megoldás kifejlesztése érdekében.

6. Összefoglalás

A Stirling motort széles körben használják és ígéretes eszköz a jövőre nézve.

Dolgozatomban a Stirling motor működésének mélyebb megismerése érdekében végzett vizsgálatok eredményeit mutattam be.

A kívülről hajtott esetben láthattuk, hogy a motor a különböző kezdeti feltételektől függetlenül hamar beáll egy egyensúlyi helyzetbe. Láthattuk azt is, hogy a munkahenger amplitúdója hogyan befolyásolja a hasznos teljesítményt.

A nem kívülről hajtott esetben vizsgáltam, hogy az ideális esetben létezik-e egyensúlyi frekvencia, illetve, hogy a különböző mechanikai veszteségek hogyan befolyásolják a működést és az egyensúlyi frekvenciát.

Ezen felül sikerült egy olyan szimulációs programot létrehozni, amellyel lehetőségünk van egy szinte tetszőleges paraméterekkel rendelkező Stirling motort szimulálni úgy, hogy közben figyelembe vehetjük a különböző korrekciókat is, amik mechanikai- vagy egyéb veszteségből adódnak.

Felhasznált irodalom

- [1] Coleman; Model 5726-750; Instruction Manual. Retrieved November 11, 2013, from <http://r1.coleman.com/Manuals/5726-750.pdf>
- [2] Twinbird; Model SC-UF01; Instruction Manual. Retrieved November 11, 2013, from http://fpsec.twinbird.jp/legacy/en/manual_SC-UF01_e.pdf
- [3] Senft JR. (1982). A simple derivation of the generalized Beale number. Proceedings of the 17th Intersociety Energy Conversion Engineering Conference, Paper 829273. Los Angeles: Institute of Electrical and Electronic Engineers;
- [4] W. M. Martini (1983). *Stirling Engine Design Manual*. Prepared for NASA. Lewis Research Center.
- [5] G. Ikram & S. McGlaun (2008 febr. 29). MSI Showcases Stirling Engine Heatsink. *Daily Tech*.
- [6] Krezinger Sz. (2010. máj. 18). Sikeres magyar fiatalok a Szilícium-völgyben. *Metropol*.
- [7] Kongtragool & Wongwises (2003). A review of solar-powered Stirling engines and low temperature differential Stirling engines. *Science Direct* (7, pp.131-154). Renewable and Sustainable Energy Reviews
- [8] Stine W. B. (1998). Stirling engines. In Kreith & Goswami (Eds.). (2005). *The CRC handbook of mechanical engineering* (pp. 1263-1273). CRC Press.

1. Melléklet

A motor belsejében kialakuló viszonyok.

$$p V_1 = n_1 R T_1 \quad (1)$$

$$p' V_1' = n_1' R T_1' \quad (2)$$

$$p V_2 = n_2 R T_2 \quad (3)$$

$$p' V_2' = n_2' R T_2' \quad (4)$$

$$U_1 = \frac{f}{2} n_1 R T_1 \quad (5)$$

$$U_1' = \frac{f}{2} n_1' R T_1' \quad (6)$$

$$U_2 = \frac{f}{2} n_2 R T_2 \quad (7)$$

$$U_2' = \frac{f}{2} n_2' R T_2' \quad (8)$$

$$U_1' - U_1 = Q_1 + W_1 + K_1 \quad (9)$$

$$U_2' - U_2 = Q_2 + W_2 + K_2 \quad (10)$$

Áttérés időbeli megváltozásokra:

$$T_1' - T_1 = dT_1 \quad (11)$$

$$T_2' - T_2 = dT_2 \quad (12)$$

$$p' - p = dp \quad (13)$$

$$n_1' - n_1 = dn_1 \quad (14)$$

$$n_2' - n_2 = dn_2 \quad (15)$$

Az egyenletek felírása a deriváltakkal:

$$(1),(2) \text{ -ből: } (p + dP)(V_1 + dV_1) = (n_1 + dn_1)R(T_1 + dT_1) \quad (16a)$$

$$(3),(4) \text{ -ből: } (p + dP)(V_2 + dV_2) = (n_2 + dn_2)R(T_2 + dT_2) \quad (17a)$$

$$(5),(6) \text{ -ből: } (U_1 + dU_1) = \frac{f}{2}(n_1 + dn_1)R(T_1 + dT_1) \quad (18a)$$

$$(7)(8)\text{-ból:} \quad (U_2 + dU_2) = \frac{f}{2}(n_2 + dn_2)R(T_2 + dT_2) \quad (19a)$$

$$dU_1 = Q_1 + W_1 + K_1 \quad (20)$$

$$dU_2 = Q_2 + W_2 + K_2 \quad (21)$$

Elvégezve a beszorzásokat, újra felírjuk az egyenleteket:

$$pV_1 + dpV_1 + pdV_1 + dpdV_1 = n_1RT_1 + dn_1RT_1 + n_1RdT_1 + dn_1RdT_1 \quad (16b)$$

$$pV_2 + dpV_2 + pdV_2 + dpdV_2 = n_2RT_2 + dn_2RT_2 + n_2RdT_2 + dn_2RdT_2 \quad (17b)$$

$$U_1 + dU_1 = \frac{f}{2}R n_1T_1 + \frac{f}{2}Rn_1dT_1 + \frac{f}{2}Rdn_1T_1 + \frac{f}{2}Rdn_1dT_1 \quad (18b)$$

$$U_2 + dU_2 = \frac{f}{2}R n_2T_2 + \frac{f}{2}Rn_2dT_2 + \frac{f}{2}Rdn_2T_2 + \frac{f}{2}Rdn_2dT_2 \quad (19b)$$

A d-ben másodrendű tagokat elhanyagoljuk:

$$pV_1 + dpV_1 + pdV_1 = n_1RT_1 + dn_1RT_1 + n_1RdT_1 \quad (16c)$$

$$pV_2 + dpV_2 + pdV_2 = n_2RT_2 + dn_2RT_2 + n_2RdT_2 \quad (17c)$$

$$U_1 + dU_1 = \frac{f}{2}R n_1T_1 + \frac{f}{2}Rn_1dT_1 + \frac{f}{2}Rdn_1T_1 \quad (18c)$$

$$U_2 + dU_2 = \frac{f}{2}R n_2T_2 + \frac{f}{2}Rn_2dT_2 + \frac{f}{2}Rdn_2T_2 \quad (19c)$$

Az egyenlő tagokat kiejtjük:

$$(1) \text{ alapján:} \quad dpV_1 + pdV_1 = dn_1RT_1 + n_1RdT_1 \quad (16d)$$

$$(3) \text{ alapján:} \quad dpV_2 + pdV_2 = dn_2RT_2 + n_2RdT_2 \quad (17d)$$

$$(5) \text{ alapján:} \quad dU_1 = \frac{f}{2}Rn_1dT_1 + \frac{f}{2}Rdn_1T_1 \quad (18d)$$

$$(7) \text{ alapján:} \quad dU_2 = \frac{f}{2}Rn_2dT_2 + \frac{f}{2}Rdn_2T_2 \quad (19d)$$

Kényszerfeltételek, ha a gáz nem szivárog:

$$dn_1 = -dn_2 = dn \quad (22)$$

$$n_1 + n_2 = N = \text{const.} \quad (23)$$

(18d)(19d) és (20)(21)-ben dU-kat egyenlővé téve kapjuk:

$$\frac{f}{2}Rn_1dT_1 + \frac{f}{2}Rdn_1T_1 = Q_1 + W_1 + K_1 \quad (24a)$$

$$\frac{f}{2}Rn_2dT_2 - \frac{f}{2}Rdn_2T_2 = Q_2 + W_2 + K_2 \quad (25a)$$

(1),(3) alapján a p:

$$p = \frac{n_1 RT_1}{V_1} = \frac{n_2 RT_2}{V_2} \quad (26)$$

Ismert kényszerfeltétel, hogy: $n_1 + n_2 = N = \text{const.}$ (27)

Így $\frac{n_1 RT_1}{V_1} = \frac{(N-n_1)RT_2}{V_2}$ (28)

Fejezzük ki p-t egy T_1, T_2, V_1, V_2 -ben szimmetrikus formulával!

$$\frac{(N-n_1)RT_2}{V_2} = \frac{n_1 RT_1}{V_1} \quad (29a)$$

$$\frac{NRT_2}{V_2} = \frac{n_1 RT_2}{V_2} + \frac{n_1 RT_1}{V_1} \quad (29b)$$

$$NRT_2 = n_1 RT_2 + n_1 RT_1 \frac{V_2}{V_1} \quad (29c)$$

$$NRT_1 T_2 = n_1 R \frac{T_1 V_1 T_2}{V_1} + n_1 R \frac{T_1^2 V_2}{V_1} \quad (29d)$$

$$NRT_1 T_2 / (V_1 T_2 + V_2 T_1) = n_1 RT_1 / V_1 \quad (29e)$$

Ezt rendezve:

$$p = N \frac{T_1 T_2 R}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \quad (30)$$

Ebből:

(28) alapján: $n_1 = N \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2 + T_2 V_1}$ (31)

$$n_2 = N - n_1 = N \left(1 - \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2 + T_2 V_1}\right) = N \frac{T_1 V_2}{T_1 V_2 + T_2 V_1} \quad (32)$$

Q, W, K meghatározása a motor paramétereire alapján:

$$Q_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) \quad (33)$$

$$Q_2 = \alpha_2 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) \quad (34)$$

$$W_1 = -pdV_1 \quad (35)$$

$$W_2 = -pdV_2 \quad (36)$$

$$K_1 = \mu_\theta dn_1 \quad (37a)$$

$$K_2 = \mu_\theta dn_2 \quad (38a)$$

Mivel a gáz nem szivárog, további kényszerfeltétel:

$$dn_1 = -dn_2 = dn \quad (39)$$

Így
$$K_1 = -K_2 \quad (40)$$

μ_θ -t kifejezzük:

$$\mu_\theta = \frac{f}{2} R T_\theta \quad (41)$$

Írjuk vissza a kapott eredményeket (26b)(27b) egyenletekbe:

$$\frac{f}{2} R n_1 dT_1 + \frac{f}{2} R dn T_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) - p dV_1 + \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (24c)$$

$$\frac{f}{2} R n_2 dT_2 - \frac{f}{2} R dn T_2 = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - p dV_2 - \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (25c)$$

fejezzük ki dn -t!

(16d),(17d)-ből:
$$\frac{dnRT_1 + n_1 R dT_1 - p dV_1}{V_1} = dp = \frac{-dnRT_2 + n_2 R dT_2 - p dV_2}{V_2} \quad (42a)$$

Ezt rendezve:

$$dnRT_1 V_2 + n R dT_1 V_2 - p dV_1 V_2 = -dnRT_2 V_1 + n_2 R V_1 dT_2 - p V_1 dV_2 \quad (42b)$$

Ebből kifejezve dn -t:

$$dn = \frac{n_2 R V_1 dT_2 - n_1 R V_2 dT_1 + p V_2 dV_1 - p V_1 dV_2}{RT_1 V_2 + RT_2 V_1} \quad (43a)$$

$$dn = \frac{\frac{n_2 R V_1 dT_2}{V_1 V_2} - \frac{n_1 R V_2 dT_1}{V_1 V_2} + p \left[\frac{dV_1}{V_1} - \frac{dV_2}{V_2} \right]}{\left(\frac{T_1 V_2}{V_1 V_2} + \frac{T_2 V_1}{V_1 V_2} \right) R} \quad (43b)$$

$$dn = \frac{NT_1 T_2 V_1 V_2}{(T_1 V_2 + T_2 V_1)^2} \left[\frac{dT_2}{T_2} - \frac{dT_1}{T_1} + \frac{dV_1}{V_1} - \frac{dV_2}{V_2} \right] \quad (43c)$$

$$dn = z_0 \frac{dT_2}{T_2} - z_0 \frac{dT_1}{T_1} + z_0 \frac{dV_1}{V_1} - z_0 \frac{dV_2}{V_2} \quad (44)$$

ahol

$$z_0 = \frac{NT_1 T_2 V_1 V_2}{(T_1 V_2 + T_2 V_1)^2} \quad (45)$$

A kapott egyenleteket rendezzük:

$$\frac{f}{2} R n_1 dT_1 + \frac{f}{2} R \left(z_0 \frac{dT_2}{T_2} - z_0 \frac{dT_1}{T_1} + z_0 \frac{dV_1}{V_1} - z_0 \frac{dV_2}{V_2} \right) T_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) - p dV_1 + \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (24d)$$

$$\frac{f}{2} R n_2 dT_2 - \frac{f}{2} R \left(z_0 \frac{dT_2}{T_2} - z_0 \frac{dT_1}{T_1} + z_0 \frac{dV_1}{V_1} - z_0 \frac{dV_2}{V_2} \right) T_2 = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - p dV_2 - \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (25d)$$

$$\frac{f}{2} R n_1 dT_1 + \frac{f}{2} R T_1 z_0 \frac{dT_2}{T_2} - \frac{f}{2} R z_0 dT_1 + \frac{f}{2} R T_1 z_0 \frac{dV_1}{V_1} - \frac{f}{2} R T_1 z_0 \frac{dV_2}{V_2} = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) - p dV_1 + \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (24e)$$

$$\frac{f}{2} R n_2 dT_2 - \frac{f}{2} R z_0 dT_2 - \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dT_1}{T_1} + \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dV_1}{V_1} - \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dV_2}{V_2} = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - p dV_2 - \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (25e)$$

Ebből a dn tag kiírásával és egyszerű átalakításokkal adódik:

$$\frac{f}{2} R (n_1 - z_0) dT_1 = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) - \left(p + \frac{f}{2} R \frac{T_1}{V_1} z_0 \right) dV_1 + \frac{f}{2} R T_\theta dn + \frac{f}{2} R T_1 z_0 \frac{dV_2}{V_2} - \frac{f}{2} R \frac{T_1}{T_2} z_0 dT_2 \quad (24f)$$

$$\frac{f}{2} R (n_2 - z_0) dT_2 = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dV_1}{V_1} - \left(p - \frac{f}{2} R \frac{T_2}{V_2} z_0 \right) dV_2 - \frac{f}{2} R T_\theta dn + \frac{f}{2} R T_2 z_0 \frac{dT_1}{T_1} \quad (25f)$$

írjuk be dn értékét:

Vezessük be:

$$a_{11} = \frac{f}{2} R (n_1 - z_0) \quad (46)$$

$$a_{12} = \alpha_1 A_1 (T_H - T_1) + \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (47)$$

$$a_{13} = - \left(p + \frac{f}{2} R \frac{T_1}{V_1} z_0 \right) \quad (48)$$

$$a_{14} = \frac{f}{2} R T_1 \frac{z_0}{V_2} \quad (49)$$

$$a_{15} = - \frac{f}{2} R \frac{T_1}{T_2} z_0 \quad (50)$$

$$a_{21} = \frac{f}{2} R (n_2 - z_0) \quad (51)$$

$$a_{22} = \alpha_1 (A_1 - A_2) (T_C - T_2) - \frac{f}{2} R T_\theta dn \quad (52)$$

$$a_{24} = - \left(p - \frac{f}{2} R \frac{T_2}{V_2} z_0 \right) \quad (53)$$

$$a_{23} = - \frac{f}{2} R T_2 \frac{z_0}{V_1} \quad (54)$$

$$a_{25} = \frac{f}{2} R \frac{T_2}{T_1} z_0 \quad (55)$$

$$a_{11}dT_1 = a_{12} + a_{13}dV_1 + a_{14}dV_2 + a_{15}dT_2 \quad (24g)$$

$$a_{21}dT_2 = a_{22} + a_{23}dV_1 + a_{24}dV_2 + a_{25}dT_1 \quad (25g)$$

T_θ függ a dugattyú sebességének irányától

$$T_\theta = \begin{cases} T_1, & \text{ha } dn < 0 \\ T_2, & \text{ha } dn > 0 \end{cases} \quad (56)$$

A motor esetében V-kre és dV-kre speciális kényszerfeltétel igaz:

$$V_1 = \left[\frac{H-M}{2} + x_1(t) \right] A_1 \quad (57)$$

$$dV_1 = A_1 \dot{x}_1(t)$$

$$V_2 = \left[\frac{H-M}{2} - x_1(t) \right] A_1 + [h_0 + x_2(t)] A_2 \quad (58)$$

$$dV_2 = -A_1 \dot{x}_1(t) + A_2 \dot{x}_2(t) \quad (59)$$

$$x_1(t) = \text{amp1} \sin(\omega t) \quad (60)$$

$$x_2(t) = \text{amp2} \cos(\omega t) \quad (61)$$

$$\dot{x}_1(t) = \text{amp1} \omega \cos(\omega t) \quad (62)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\text{amp2} \omega \sin(\omega t) \quad (63)$$