„Bevezetés a fizikába I.”

Környezettan alapszak (B.Sc.)

I. félév

előadásjegyzetek

Kiss Ádám
Veres Gábor

„Bevezetés a fizikába I.”

Az előadás fóliái megtalálhatók a tantárgy honlapján:

http://ion.elte.hu/~bevfiz

előadó: dr. Veres Gábor

Iroda: Északi épület 3.88
Telefon: 6335 vagy 06 1 372 2760
E-mail: vg@ludens.elte.hu
Fogadóóra (szorgalmi időszakban):
hétfő 15:00–17:00

gyakorlatvezető: Finta Viktória

Iroda: Északi épület 0.116
Telefon: 6318
E-mail: katica@ludens.elte.hu
Fogadóóra (szorgalmi időszakban):
szerda, péntek 12:00–13:00

Követelmények

Gyakorlati jegyhez:

- Részvétel a Fizika felzárkóztatón (legfeljebb 4 hiányzás)
- Két sikeres ZárthElyi dolgozat (egy pót-ZH, majd UV)
- Négy sikeres röpdolgozat (legalább 60%-os)
- Legfeljebb három hiányzás

Vizsgához:

- Érvényes gyakorlati jegy
- Közös írásbeli vizsga megírása
- Végül rövid szóbeli vizsga

További részletek: http://ion.elte.hu/~bevfiz

Tanácsok:

- Tanuljunk hétről hétre!
- Ne maradjunk le az anyaggal!
- Kérjünk csoportos konzultációt, ha hiányosságok vannak a tudásunkban!

Bevezetés a Fizikába I. és II.

ELŐADÁSVÁZLAT
KÖRNYEZETTAN ALAPSZAKOS (BSC)
HALLGATÓK RÉSZÉRE

I. Bevezetés

1. A fizika szerepe a környezettudományban. Nagyságrendek, elnevezések a fizikában.
2. A fizika történetének fontosabb évszámai.

II. MECHANIKA

1. **Mozgástan (kinematika).**
2. **Newton törvényei.**
3. **Munka, energia, teljesítmény, lendület.**
4. **Anyagpont-rendszer. A merev test egyensúlya, mozgása. A perdület.**
5. **A folyadékok mechanikája. Az áramlástan alapjai.**
6. **Hullámmozgás. Hullámok tulajdonságai. Hullámok szuperpozíciója, interferenciája.**
7. **Hanghullámok, a hangtan elemei.**

III. HŐTAN (TERMODINAMIKA)

1. A hőmérséklet és a hő.
2. A hőátadás formái és törvényei.
3. A gáztörvények. Az ideális gáz. Kinetikus gázelmélet. Reális gázok.
4. A hőtan főtételei. Az entrópia.

IV. ELEKTROMOSSÁGTAN ÉS MÁGNESSÉGTAN

1. Az elektrosztatika. Áramok.
2. A mágneses tér. Gerjesztési törvény. Indukció.
3. Egyenáramú és váltóáramú áramkörök.

IV. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK. A FÉNYTAN ALAPJAI.

1. Az elektromágneses hullámok. A fény.
2. Visszaverődés, törés. Geometriai optika.
3. A fény hullámtermészete, fizikai fénytan.

V. A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET

1. **Tér és idő. Speciális relativitáselmélet.**
2. **Jelenségek a fénysebesség körül. Relativisztikus sebességek összeadása.**
3. **A tömeg és az energia kapcsolata.**

VI. A KVANTUMFIZIKA KÍSÉRLETI ALAPJAI

1. **A fény kettős természete.**
2. **Az anyaghullámok. A határozatlansági reláció. A Schrödinger-egyenlet.**
3. **A hidrogénatom.**
4. **Az atomok természete.**

VII. A MAG- ÉS RÉSZECSKEFIZIKA

1. **Az atommagok és tulajdonságaik.**
2. **Az ionizáló sugárzások tulajdonságai.**
3. **A nukleáris energetika fizikai alapjai.**
4. **Az elemi részek, áttekintésük.**

VIII. A FIZIKAI MÉRÉS

1. **A fizikai mérések kiértékelése.**
2. **Hibaszámítás, várható érték, standard deviáció, korreláció, hibaterjedés.**

I. BEVEZETÉS

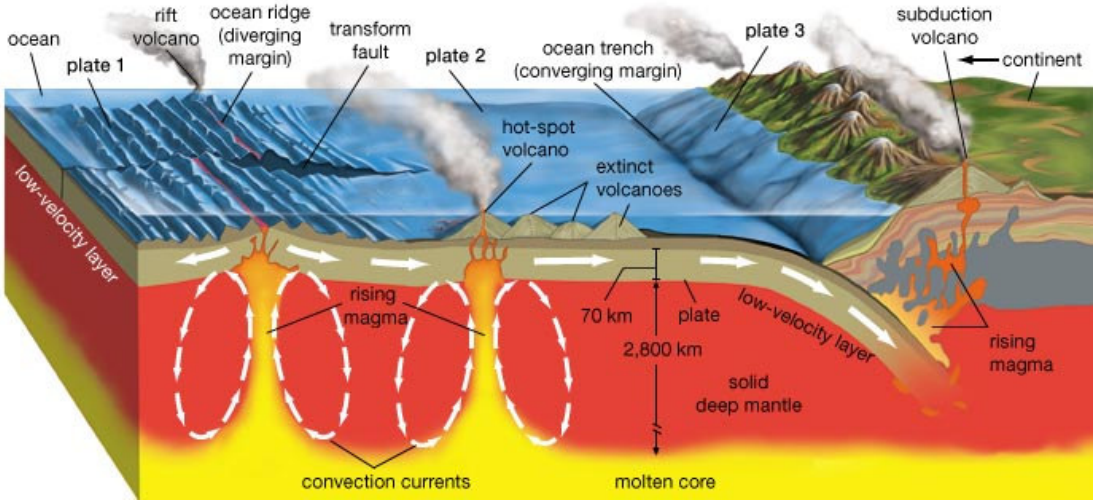
FIZIKA A KÖRNYEZETTUDOMÁNYOKBAN

A legtöbb környezeti jelenség megértéséhez fizikai ismeretekre (is) szükség van!

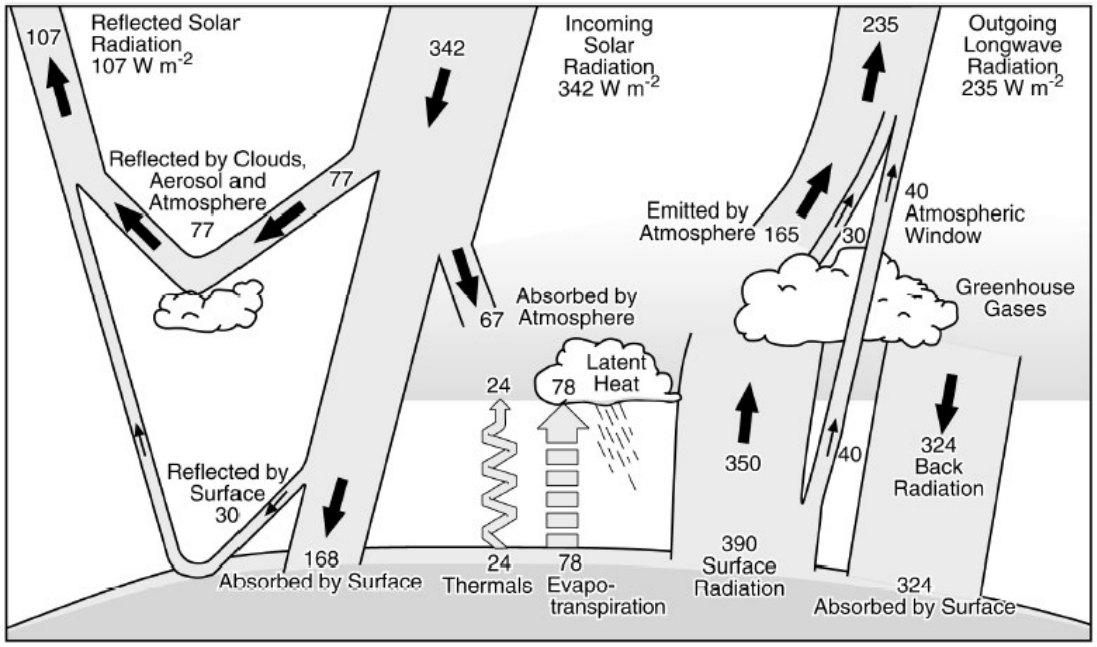
- **Fizikai jelenségek a Föld kialakulásában, felszínének változásában.**
- **A Föld energiaháztartása.**
- **A légkör és a klíma.**
- **Fizika a víz körforgásában, óceánok folyamataiban, felszíni vízáramokban.**
- **A környezeti szennyezések terjedése.**
- **Hang-, sugár-, hő-, fény-, hangszennyezés.**
- **Az energetika. Az energiatakarékosság, megújuló energiaforrások.**
- **Anyagtudomány, új környezetbarát anyagok, környezettudatos gyártási technológiák.**
- **Fizikai a szennyezések kimutatása. Szerep a modern méréstechnikában.**
- **A környezetvédelem fizikai módszerei.**
- **Fizika az orvostudományban**

Illusztrációk: fizika a környezettudományban

Földkéreg dinamikája:



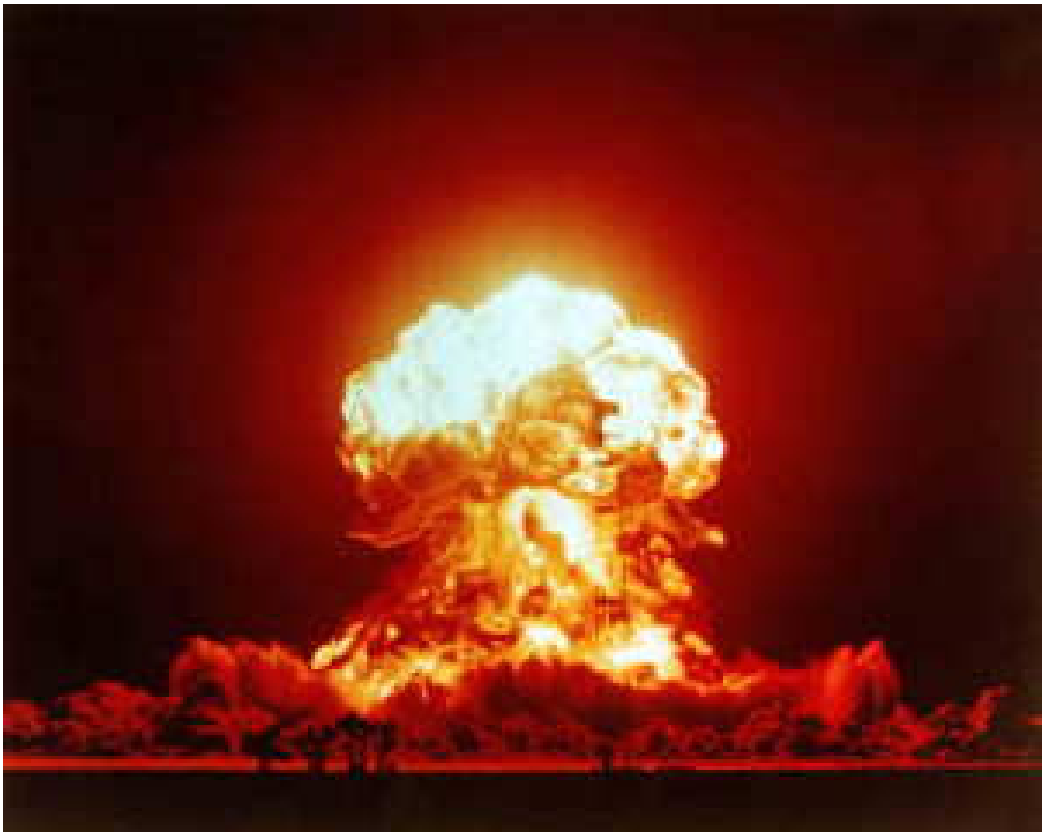
A Föld energiaháztartása:



Felszíni vízfolyások, folyókanyarulatok:

Légszennyezés terjedése:

Elektromágneses és radioaktív sugárzások hatásainak vizsgálata, dózismérés:

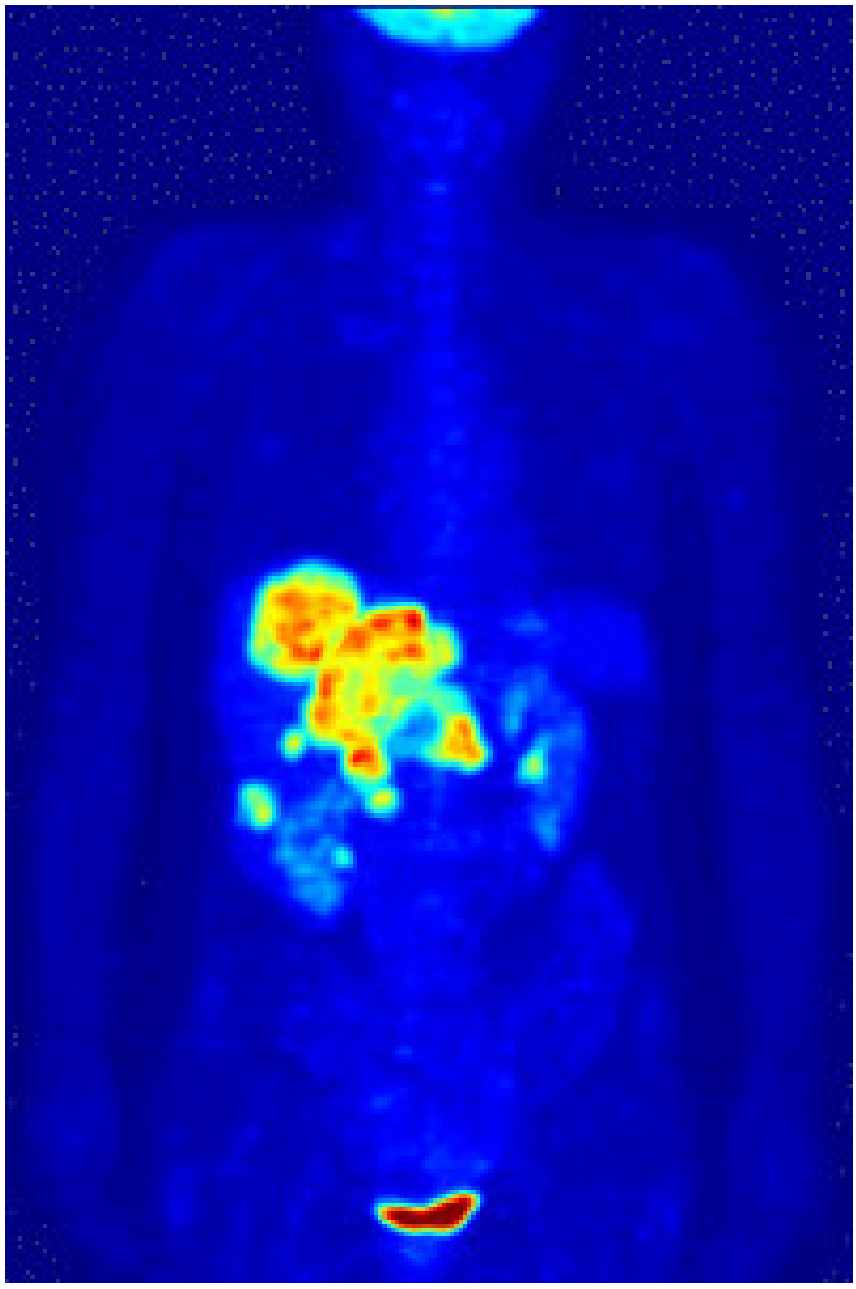


Megújuló energiaforrások:

Sugárvédelem és dozimetria:

Légköri jelenségek, hurrikánok:

Orvosi fizikai alkalmazások (pozitron-emissziós tomográfia):



A FIZIKATÖRTÉNET FONTOSABB ÉVSZÁMAI

- ***A tudomány kezdetei***

Kr.e. 2000. Írás kezdetei, egyiptomi hieroglifák
Hatvanas számrendszer Mezopotámiában.
Kr.e. 1000. A vas használatának elterjedése.
Kr.e. 850-500. A bolygómozgás megfigyelése.
Nap- és Holdfogyatkozások (asszír, perzsa)

- ***A görög és római örökség, a korai középkor***

Kr.e. 624(?)-546(?) *THALÉSZ*, a geometria kezdetei.
Kr.e VI-V. *PITAGORASZ*, *SZOKRATÉSZ*, *PLATÓN*,
Kr.e V. sz. *DÉMOKRITOSZ*, atom-hipotézis
Kr.e 384-322. *ARISZTOTELÉSZ* (univerzális)
Kr.e 287(?)-212. *ARKHIMÉDÉSZ*, hidrosztatika
120-160. *PTOLEMAIOSZ*, Föld-központú világkép
354-430. *SZENT ÁGOSTON*, skolasztika

- ***A középkor***

III.-X.sz. Arab, hindu. Arab, bizánci közvetítés
XI. sz.-tól Európai egyetemek.
Első: Bologna, 1088.

- ***Újkor: a klasszikus fizika fejlődése és virágzása***

1397-1468. *GUTENBERG*, könyvnyomtatás *(1457.)*
1473-1543. *COPERNICUS*, Krakkó, heliocentrikus világkép
1571-1630. *Johannes KEPLER*, bolygók mozgásának törvényei.
1564-1642. *Galileo GALILEI*,kísérleti megismerés
1596-1650. *Renè DESCARTES*
1629-1695. *Christian HUYGENS*, hullámtan
1642-1727. *Isaac NEWTON* törvényei
1646-1716. *G. W. LEIBNITZ*, integrálszámítás
1717-1783. *d'ALEMBERT*, enciklopédista
1700-1782. *D. BERNOULLI*, áramlástörvény
1736-1813. *J. L. LAGRANGE*, égi mechanika

1736-1806. *Charles COULOMB*, elektrosztatika
1777-1855. *Karl Friedrich GAUSS*
1814-1878. *Julius R MAYER*,energiamegmaradás
1831-1875. *James C. MAXWELL*, elektrodinamika
1834-1906. *Dmitrij Ivanovics MENGYELEJEV*
1824-1907. *William THOMSON (Lord KELVIN)*.

- ***A modern fizika alapjainak kialakulása***

1898. *Pierre és Marie CURIE*, rádium
1848-1919. *EÖTVÖS Loránd*, tehetetlen és gravitáló tömeg
1900. *Max PLANCK*, energia-kvantálás
1879-1957. *Albert EINSTEIN*, speciális relativitáselmélet (1905.)
1911. *Robert A. MILLIKAN*, elemi töltés
1909-1911. *Ernest RUTHERFORD*, atommag
1913. *Niels BOHR*, a hidrogénatom
1922. *Arthur Halley COMPTON*, Compton-effektus

1922. *O. STERN, W.Gerlach*, iránykvantálás
1924. *Louis DE BROGLIE*, anyaghullám
1926. *Erwin SCHRÖDINGER*, hullámegyenlet
1927. *Werner HEISENBERG*, határozatlansági reláció
1932. *James CHADWICK*,neutron felfedezése

- ***A legújabb kor fizikájának korszakos eredményei***

– A magfizika fejlődése. Az atomenergia.
– Elemirész-fizika. Leptonok, kvarkok, gluonok.
– Az elektronika fizikai alapjai.
– Forradalom az anyagtudományokban.
– Sokrészecskés kvantum- és klasszikus rendszerek komplex viselkedése

EGYSÉGEK A FIZIKÁBAN, AZ SI RENDSZER

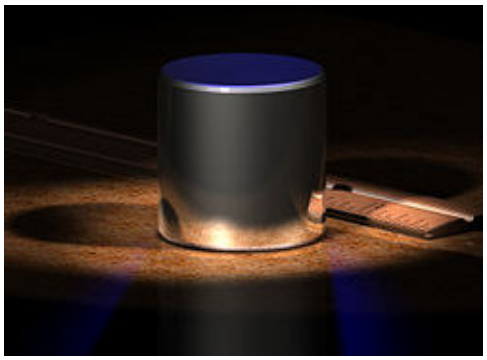
Hossz	**m,** cm
Tömeg	**kg,** g
Idő	**s,** óra

Etalonok: Sèvres-i Mérésügyi Hivatalban

^{133}Cs rezgései 1 s = 9 192 631 770 rezgés

1 méter: amennyit a fény vákuumban megtesz 1/299792458 s alatt

kg: etalon Sèvres-ben:



A mértékegységek fontosak, segítenek az önellenőrzésben:

minden fizikai egyenletben egyezniük kell a jobb és bal oldalon szereplő mértékegységeknek!

pl.: s = v · t

m = m/s · s

ELŐTAG	JEL	NAGYSÁGREND
yotta	Y	10^{24}
zetta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hekto	h	10^{2}
deka	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yokto	y	10^{-24}

II. MECHANIKA

1. KINEMATIKA

1.1. Alapfogalmak

- Elmozdulás
- Sebesség
- Gyorsulás

1.2. Vektorok a fizikában

- Műveletek vektorokkal
- Vektoralgebra
- Vektorok komponensei

1.3. Az egydimenziós mozgás

- egyenes vonalú egyenletes mozgás
- egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

1.4. Kétdimenziós (sík) mozgások

- Hajítás
- Az egyenletes körmozgás

1.5. A harmonikus rezgőmozgás

Mechanika fő feladata:

anyagi átalakulásnak nem alávetett rendszerek *jelenlegi* állapotából *jövőbeni* állapotára következtetni

Rendszerek: általában összetettek

Anyagi pont:

- **az absztrakció lényege: kiterjedés nélküli, tömeggel bíró részecske**
- **mi közelíti az anyagi pontot?**

Anyagi pont mozgása→ visszaidézhetően, egyértelműen kell meghatározni
Ennek technikája:
***koordináta-rendszerek* bevezetése**

Koordinátarendszer: megállapodás kérdése:

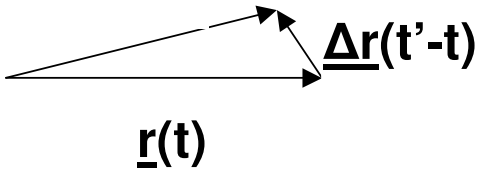
- **Hol a kezdőpont (honnan kezdjük a mérést)?**
- **Milyen mennyiségeket kell megadnunk?**
- **Helyvektor: a kezdőpontból a pontba húzott vektor**
- **Az időbeli változásokat a koordináták időbeni változásaival lehet leírni: ezek időfüggvények**

1.1. A KINEMATIKA ALAPFOGALMAI

Mozgástan: a mozgást jellemzi,
a mozgás okát nem kutatja

- **Elmozdulás: irány és nagyság szerint**

$\underline{r}'(t') = \underline{r} + \underline{\Delta r}$



$\underline{v} = \Delta\underline{r}/\Delta t$

- **Sebesség**

$$\underline{v} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

Dimenzió: *m/s*

Pillanatnyi sebesség $\lim(\Delta t \to 0)\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$

- **Gyorsulás**

$$\underline{a} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} \qquad \Delta t \to 0$$

Dimenzió: *(m/s)/s = m/s²*

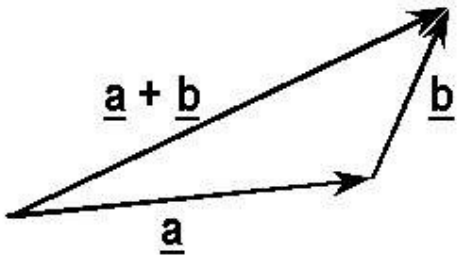
1.2. VEKTOROK A FIZIKÁBAN

Skalár: nagyság
(pl. tömeg, idő, hőmérséklet)
Vektor: nagyság és irány
(pl.: elmozdulás, sebesség, gyorsulás)

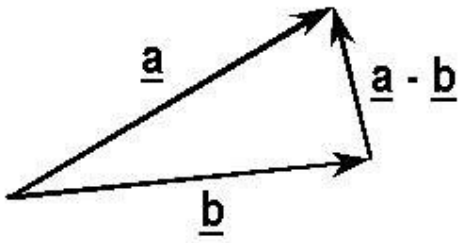
Vektor:
önmagával párhuzamosan eltolható

Vektoralgebra:

összeg:



különbség:

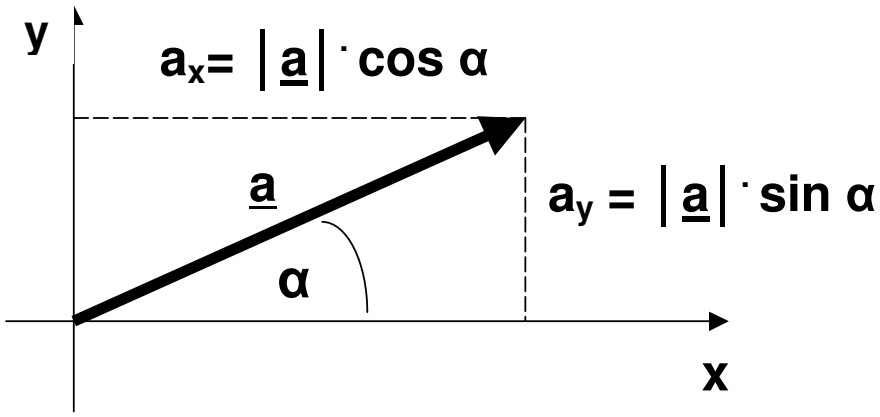


számmal való szorzás: a vektor hosszát változtatja, irányát nem

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
asszociatív: $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$
disztributív: $k \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = k \cdot \underline{a} + k \cdot \underline{b}$

Vektor: eltolható → mindig az origóból kiindulónak tekintjük → koorináta-rendszerben számokkal jellemezzük (*mi mindig derékszögű koordináta-rendszerben dolgozunk)*

Vektorok komponensei:



A vektor hossza: $|\underline{a}|$, ahol $|\underline{a}|^2 = |\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2$

Az összeadás a komponensek nyelvén:

$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \rightarrow$

$c_x = a_x + b_x; \quad c_y = a_y + b_y; \quad c_z = a_z + b_z.$

Számmal való szorzás:

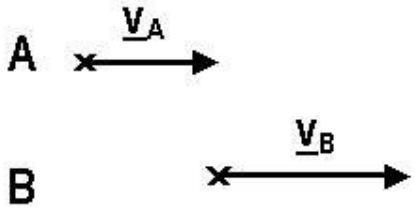
$k \cdot \underline{a} \rightarrow (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$

Null vektor ($\underline{0}$): minden komponense zérus

Vektorok akkor egyenlők, ha minden komponensük egyenlő

Eddigi vektorok: helyvektor, sebesség- és gyorsulásvektor → origóból indulónak tekintjük őket! (egyértelműség)

<u>Sebesség összeadás</u>:



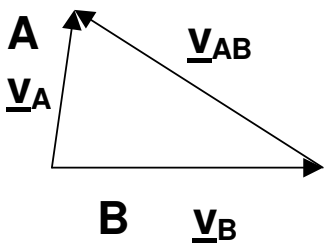
$$\underline{v} = \underline{v}_A + \underline{v}_B$$

M: álló megfigyelő, A: mozgó jármű, B: mozgó ember az A járművön

B sebességét M ekkorának látja: $\underline{v}_A+\underline{v}_B$

A sebessége M megfigyelőhöz képest $\underline{v}_{AM}$, akkor M sebessége A-hoz képest $-\underline{v}_{AM}$

<u>Sebesség kivonás:</u>
Viszonylagos (relatív) sebesség: sebességek *vektori* különbsége

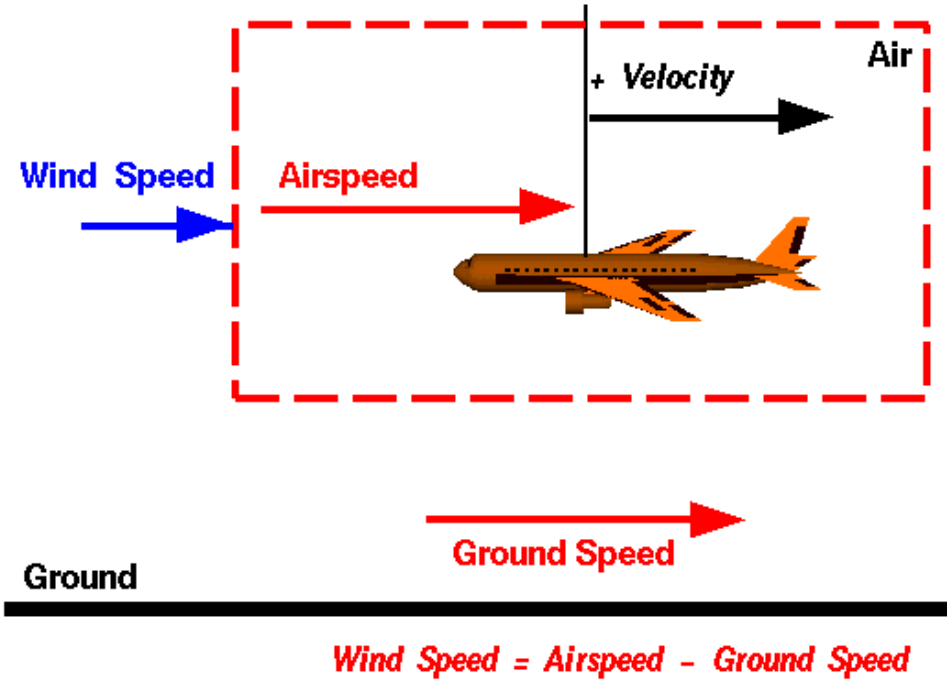


$$\underline{v}_{AB} = \underline{v}_A - \underline{v}_B$$

A sebessége B-hez képest

Példák:

- Különböző irányokba menő autók
- Átkelés a folyón
- Repülőből kidobott csomag
- Műhold geostacionárius pályán
- Űrséta, űrszemét
- Repülési sebesség és szélsebesség:



Kinematikai leírás:

Térben: $\underline{r}(t)$, $\underline{v}(t)$, $\underline{a}(t)$ **(9 időfüggvény)**

(ezek nem mind függetlenek!)

Síkmozgás (+ jó koordináta-rendszer):

(6 időfüggvény)

Egyenesvonalú mozgás (+ jó koord.r.):

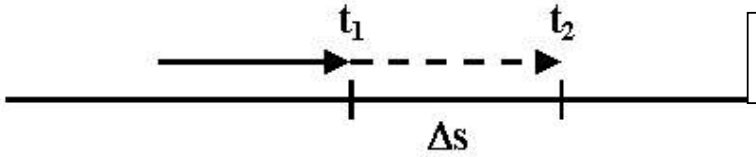
(3 időfüggvény)

(ezek nem mind függetlenek!!!)

1.3. Egydimenziós mozgások

Egy egyenes mentén:

$\Delta t = t_2 - t_1$



$\underline{v} = \Delta\underline{s}/\Delta t$

- **Egyenes vonalú egyenletes mozgás:**
  $\underline{v} = \underline{v}_0$ ***(állandó!)*** → **megtett út:** $\underline{s} = \underline{v}_0 \cdot t$

- **Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás:**

gyorsulás: $\underline{a} = \Delta\underline{v}/\Delta t = \underline{a}_0$ ***(állandó!)***

pillanatnyi sebesség: $\underline{v}(t) = \underline{v}_0 + \underline{a} \cdot t$

átlagsebesség:

$$v_{ÁTL} = \frac{v_0 + v(t)}{2} = \frac{(v_0 + v_0 + a \cdot t)}{2} = v_0 + \frac{a \cdot t}{2}$$

megtett út:

$$s = v_{ÁTL} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Példa: szabadesés:
(az ejtőernyős ugrás első másodperceiben)

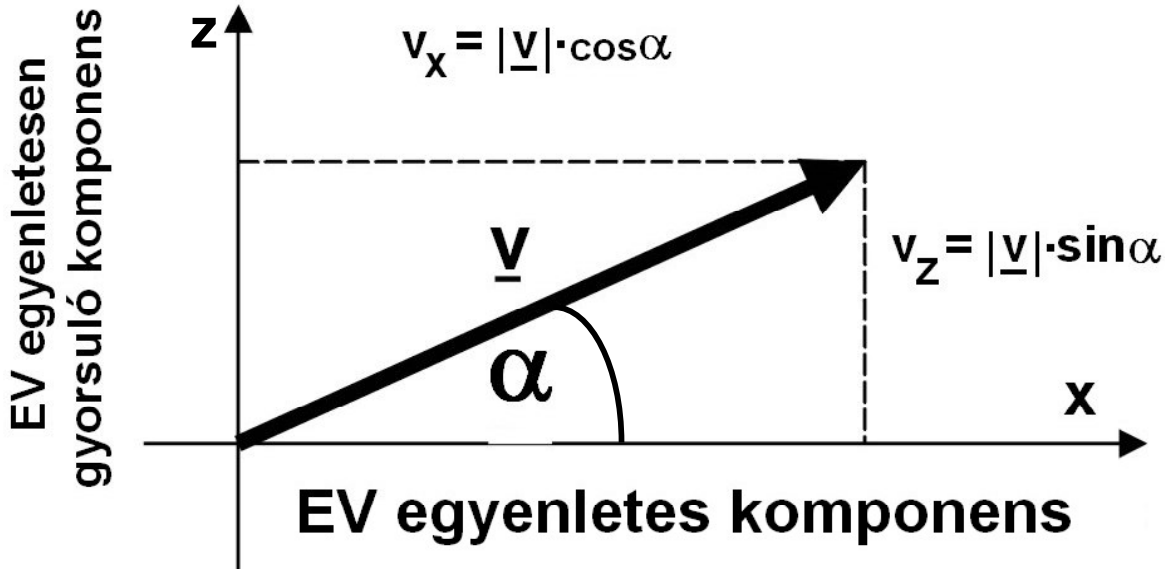
Az <u>a</u> gyorsulás iránya lehet ellentétes is <u>v</u> irányával (→ lassulás, <u>a</u> negatív előjelű).

Példa: szabadesés felfelé indulva (trambulin):

1.4. Síkmozgás: jól megválasztott koordináta-rendszerben egyszerű leírni

A mozgást két komponensből építjük fel

- **Hajítás** (a=–g= nehézségi gyorsulás ≈ 9,8m/s^2):



Függőleges koordináta (magasság):

$$z(t) = |\underline{v_0}| \cdot \sin\alpha \cdot t - (g/2) \cdot t^2$$

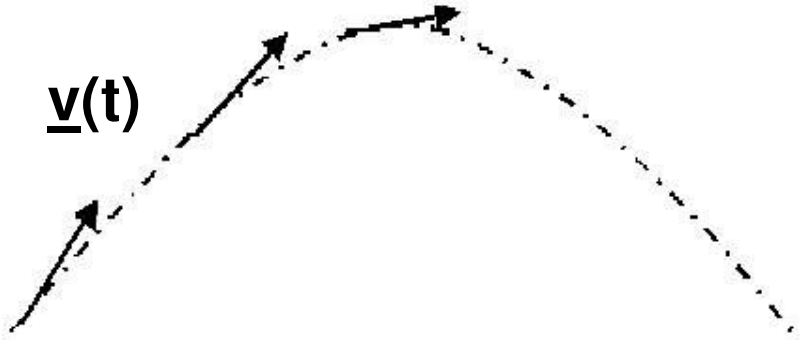
Függőleges sebesség:

$$v_z(t) = |\underline{v_0}| \cdot \sin\alpha - g \cdot t$$

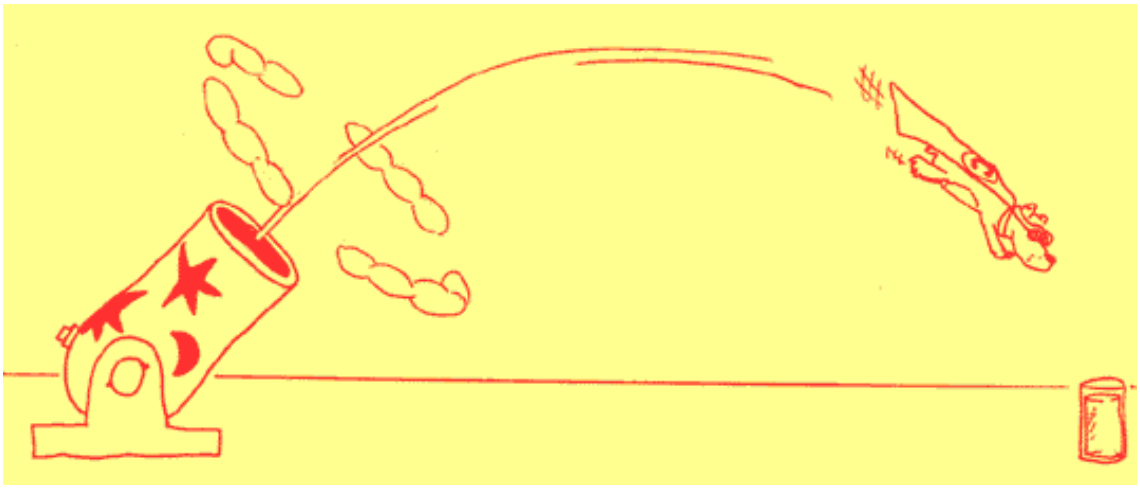
Vízszintes koordináta (elmozdulás):

$$x(t) = |\underline{v_0}| \cdot \cos\alpha \cdot t$$

A pálya alakja tehát parabola (ha **g** állandó):



Példák ferde hajításra:
ágyúgolyó, darts, tenisz, fallabda, stb.



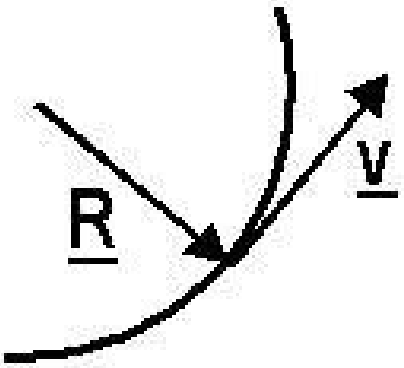
Hajítással kapcsolatos kérdések:

- **Mikor ér vissza az elhajított test?**
  Használjuk ki, hogy a fordulóponton $v_z = 0$
- **Mekkora a hajítás távolsága?**
  Abban a t' időpontban, amikor z(t') = 0 lesz, a keresett távolság: x(t')
- **Mekkora sebességgel ér földet?**
  Akkor érdekes, ha más magasságból indult mint ahova érkezik. Használható az energiamegmaradás is.

Megjegyzés:
a valódi hajításnál a légellenállás, a centrális (nem homogén) mágneses tér, a Föld forgása stb. is számít, de ezeket most – még – elhanyagoljuk.

Körmozgás

Pálya: kör. Sugara: R = |R|



sebesség:
***tangenciális* és**
***radiális* komponens**

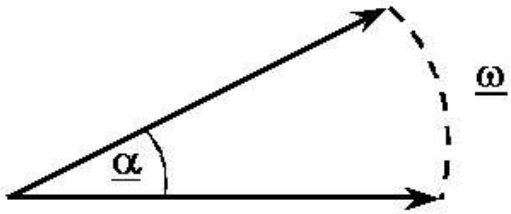
mindig R ⊥ v

Különleges esetek:

– egyenletes körmozgás:

|v| = v (a sebesség *nagysága* állandó)

szögsebesség: ω, mértékegysége: *1/s*



ω = Δα/Δt

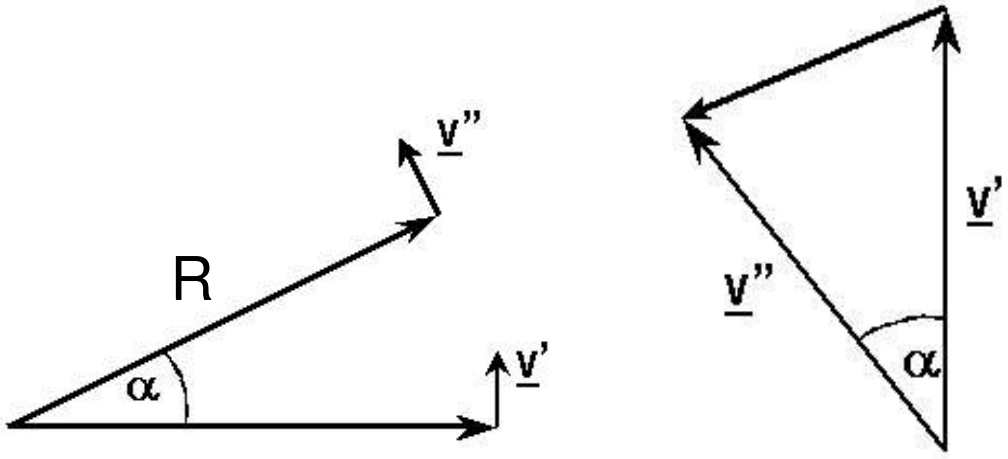
α (rad) = ívhossz/sugár

ω = állandó

$\alpha = \alpha_0 + \omega \cdot t$

sebesség: |v| = [ívhossz/t] = $R \cdot \omega$

gyorsulás az egyenletes körmozgásnál:
(a v" és v' sebességvektorok önmagukkal párhuzamosan eltolhatók:)



Kis Δt időtartam alatti sebességváltozás:

$$|\Delta\underline{v}| = |\underline{v}'' - \underline{v}'| = |\underline{v}| \cdot \alpha = |\underline{v}| \cdot \omega \cdot \Delta t \quad \text{ha } (\Delta t \to 0)$$

Tehát a gyorsulás definíciója szerint:

$$|\underline{a}| = |\Delta\underline{v}|/\Delta t = |\underline{v}| \cdot \omega = v \cdot \omega =$$
$$v \cdot (\text{ívhossz}/R)/\Delta t = [v \cdot (v \cdot \Delta t)/R]/\Delta t =$$
$$= v^2/R = R \cdot \omega^2$$

A gyorsulás *iránya* pedig a <u>körpálya középpontja felé</u> mutat.

– egyenletesen gyorsuló körmozgás:

pálya: kör

sebesség *nagysága*: egyenletesen nő

***iránya*: érintőirányú**

Tehát most a fent tárgyalt sugárirányú gyorsulás-komponens mellett most egy másik is van:

a_T → tangenciális (érintőirányú) gyorsulás

Új fogalom: szöggyorsulás

$\beta = \Delta\omega/\Delta t$, mértékegysége: $1/s^2$

(szögsebesség időegység alatti megváltozása)

egyenletesen gyorsuló körmozgásnál:

β = állandó

Ekkor a tangenciális gyorsuláskomponens nagysága:

$$|a_T| = [v(t_2) - v(t_1)]/\Delta t = R \cdot \Delta\omega/\Delta t = R \cdot \beta$$

Példák (közelítőleg):

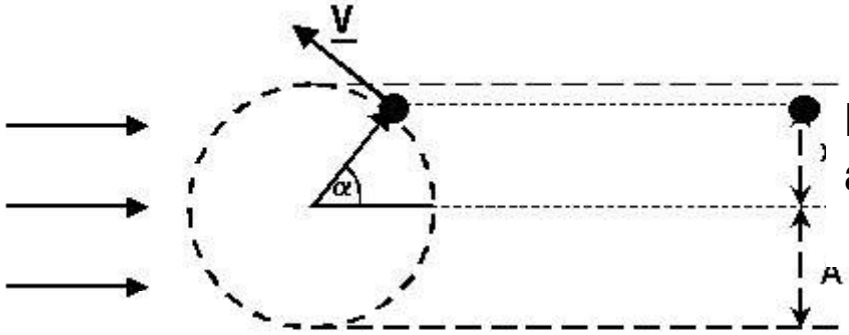
éppen beinduló villanymotor

lassuló búgócsiga ($\beta<0$)

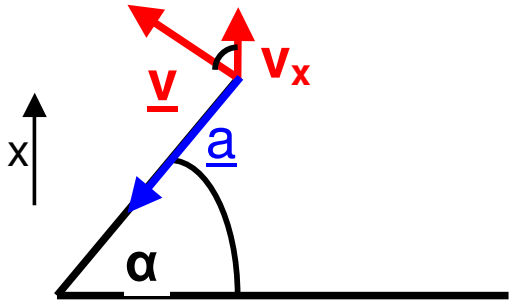
1.5. Harmonikus rezgőmozgás

Egydimenziós mozgás.

Definíció: egyenletes körmozgást végző test *élvetülete* (a kör sugara most *A*)**:**



$$\alpha = \alpha_0 + \omega \cdot t$$



α_0: kezdeti szöghelyzet

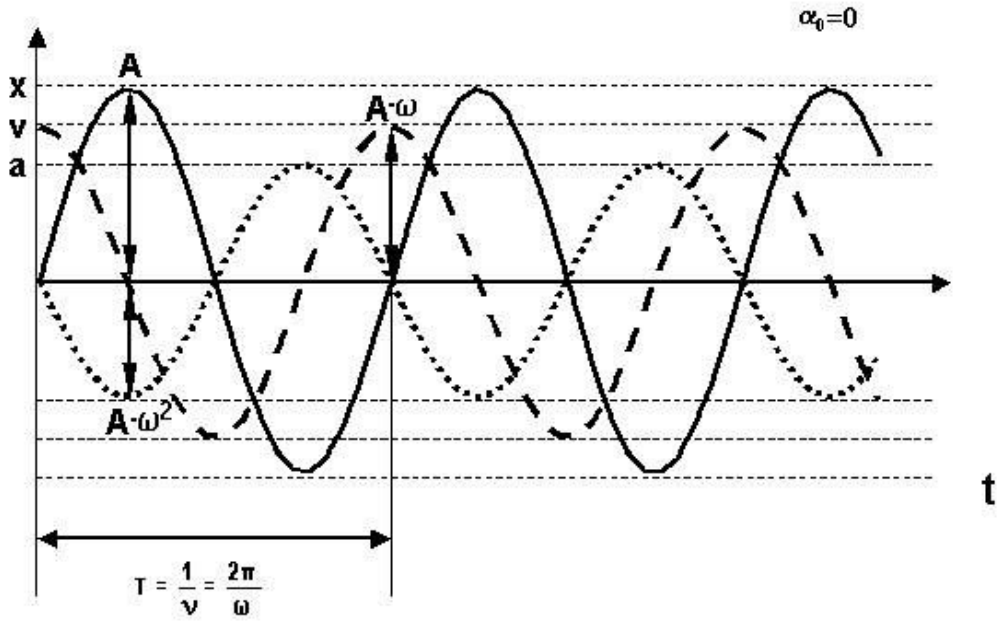
$$x = A \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

$$v_x = v \cdot \cos(\alpha_0 + \omega \cdot t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

$$a_x = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

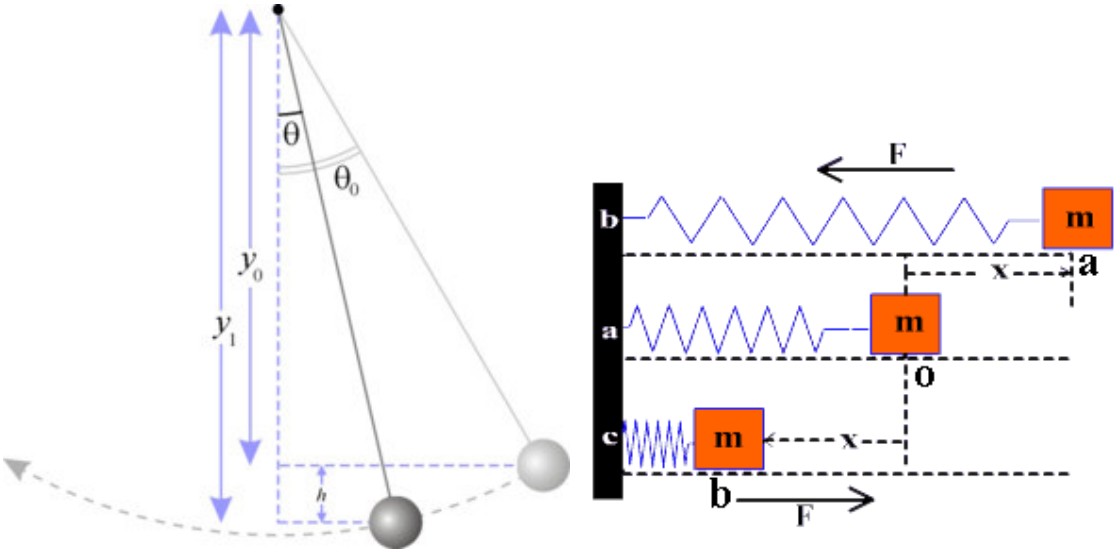
ismétlődés → frekvenciával jellemezzük →

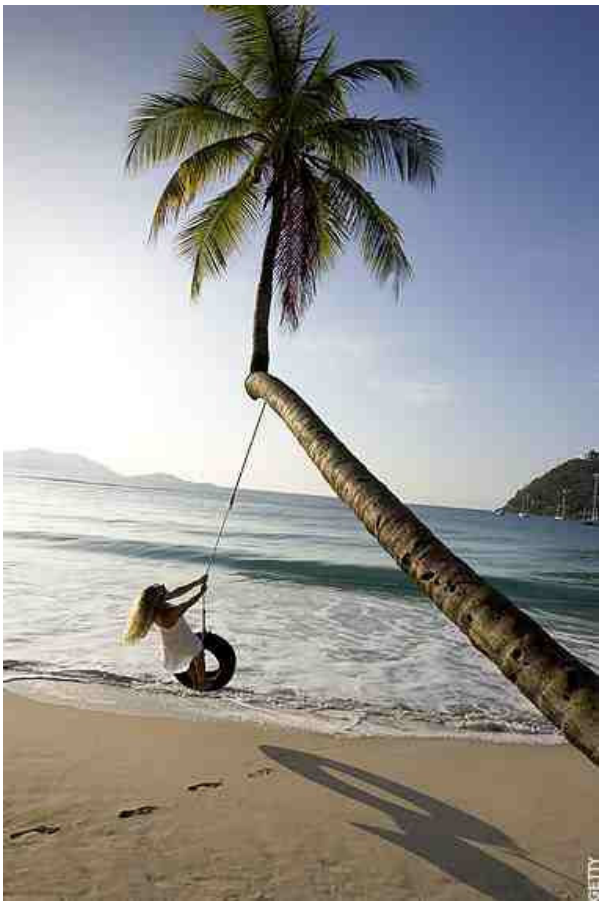
$\nu = 1/T = \omega/2\pi$**.** (T: periódusidő, ω :körfrekvencia)



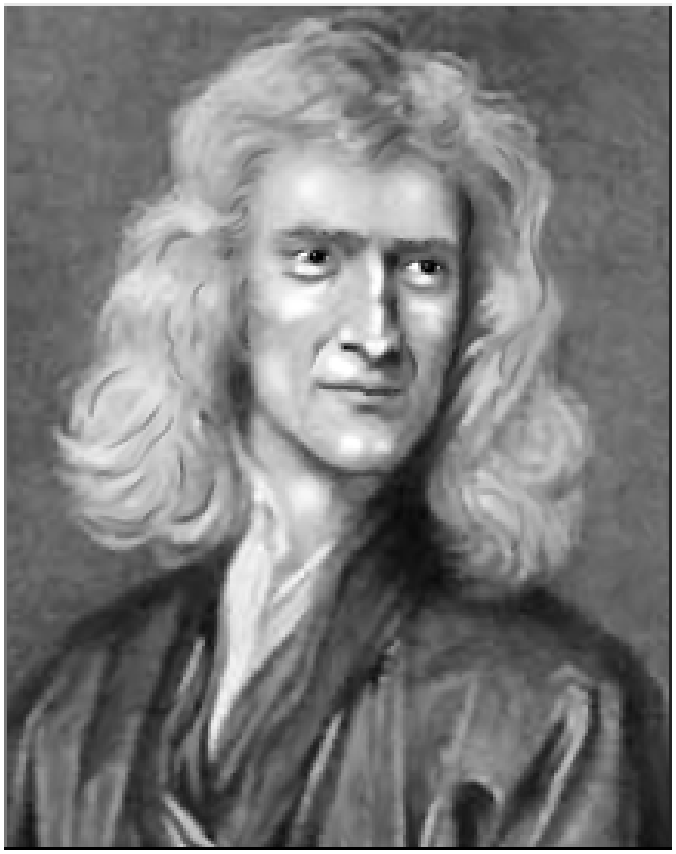
Példák harmonikus rezgőmozgásra:

- inga mozgása, hinta
- rugóra függesztett súly





2. NEWTON TÖRVÉNYEI



Kneller, 1689

Sir Isaac NEWTON
Scientist and Mathematician

1642. dec. 15. – 1727. márc. 20.

“If I have been able to see further, it was only because I stood on the shoulders of giants.”

“Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, Let Newton be! and all was light.”
— Alexander Pope

Isaac NEWTON 1642 – 1727:

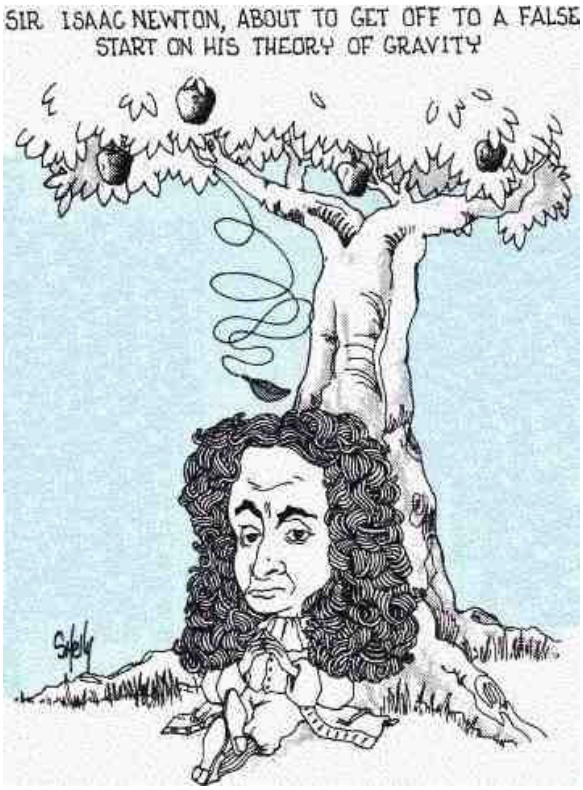
- Matematika, Trinity College (Cambridge)
- 1669 professzor Cambridge-ben
- 1684-ben kezdi a Principiát (1687)
- 1692-93 betegség. Felépül, de komoly eredménye már nincs
- 1699 pénzverde vezetője
- 1705 lovag
- 1703-27 Royal Society elnöke.
- sírja: Westminster Abbey

Fő műve: PHYLOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATEMATICA (1687, London)

[pénz: *Edmund Halley segítségével*]

Három rész az axiómák, definíciók után:

- **Testek mozgása (centrális erő, tömegpont)**
- **Testek mozgása súrlódó közegben,**
- **(lényegében) Bolygómozgás, gravitációs törvény**



Newton törvényei: a klasszikus fizika alaptörvényei

– **200 évig meghatározók a fizikai gondolkodásban**

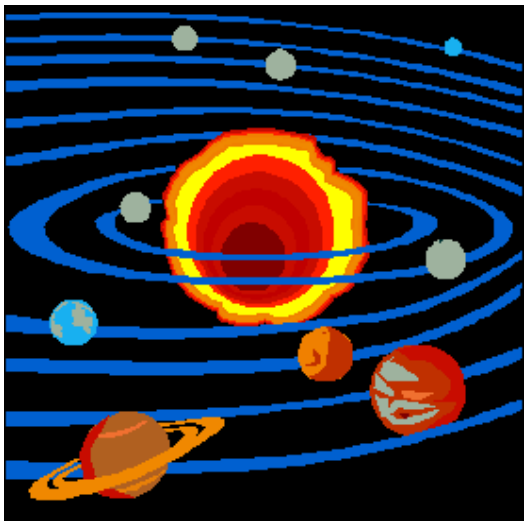
Problémái:

- **Mitől mozognak a testek?**

- **Milyen szerepe van a megfigyelési (koordináta-)rendszernek?**
- **Melyik rendszerből kell a jelenségeket megfigyelni?**

- **Mi az erő?**
  Egyszerre vezeti be az alkalmas megfigyelési rendszert (*inerciarendszert*), a mozgásállapot-változást okozó hatást (*erő*t) és a *tömeg*et.

- **Gravitációs kölcsönhatás tulajdonságai.**
  Mi a kapcsolat a *gravitáló* és *tehetetlen* tömeg között?



2.1. Newton első törvénye

- **Egy test megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg egy erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.**

Lényege: VAN olyan megfigyelési rendszer, ahonnan nézve a mozgásállapot megváltozását mindig kölcsönhatáshoz rendelhetjük.

Ez az INERCIARENDSZER
(tehetetlenségi rendszer).
Hol van ilyen?

- **kérdés, milyen pontosan...**
- **minden csillagtól távoli űrben**

A mozgásállapot megváltozik, ha gyorsuló megfigyelő szemével nézzük!
(pl. kanyarodó buszon, kerékpáron erő hat ránk)

2.2. Newton második törvénye

- **A testre ható erők eredője arányos a testen létrejövő gyorsulással. (Csak inerciarendszerben igaz!)**

$$\sum \underline{F}_i = m \cdot \underline{a}$$

– **„m” a tömeg: a test tulajdonsága, amely meghatározza, hogy adott erő mellett mekkora lesz a gyorsulás.**
egység: kg, g, t, stb.

– **Erő: kölcsönhatás, mely gyorsulást hoz létre**
mértékegysége: *1 N* (newton) *= 1 kg·m/s²*
más egységek: *1 dyn = 1 g·cm/s²*
1 kp → 1 kg tömegű test súlya (≈9,81 N)

Egyensúly feltétele: $\sum \underline{F} = \underline{0}$, ekkor $\underline{a} = \underline{0}$.

Példák a II. Netwon-törvényre:

- **szabadesés** – grav. erő
- **lejtőn leguruló test** – gravitációs erő és a lejtő nyomóereje
- **rakéta** – hajtőműből kiáramló gáz nyomóereje

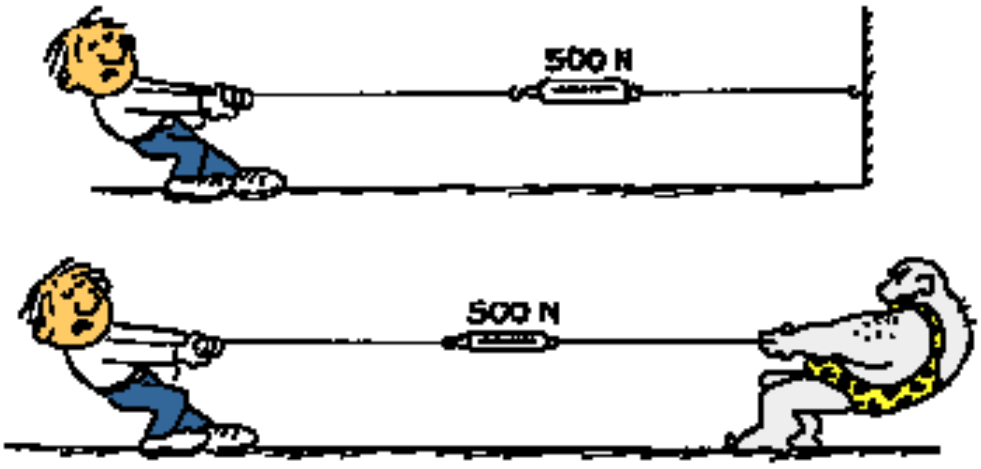
2.3. Newton harmadik törvénye

- **Ha egy test valamilyen erővel hat egy másik testre, akkor e másik test ugyanakkora ellentétes irányú erővel hat az első testre (hatás – ellenhatás; akció – reakció)**

Az fenti erők különböző testekre hatnak!

Példák (hol az ellenerő, mire hat?):

- **gyorsulva futó ember,**
- **fékező utánfutó,**
- **szabadon eső test,**
- **egyenletes körmozgást végző test,**
- **rakéta (gyorsulás közben),**
- **bolygó (keringés közben),**
- **feszítőerők kötelekben,**
- **nyugvó testek a Földön, stb.**



2.4. Mozgások dinamikája (erőtana)

$$\sum \underline{F}_i = m \cdot \underline{a}$$

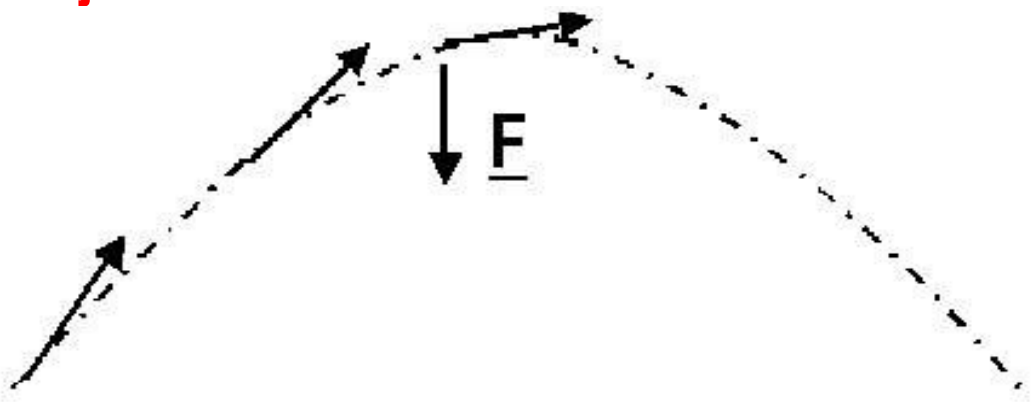
Speciális esetek:

a) Egyenes vonalú egyenletes mozgás:
$\underline{v}$ = állandó vektor, nincs gyorsulás

$\underline{a} = \underline{0}$ → $\underline{F} = m \cdot \underline{a} = \underline{0}$
→ *Feltétel*: erők eredője legyen $\underline{0}$.

b) Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás: $\underline{a}$ = állandó vektor
→ $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ = állandó vektor
→ *Feltétel*: mozgással *egyirányban* ható állandó nagyságú erő

c) Hajítás



***Feltétel*: állandó nagyságú** (általában nem a mozgás irányába mutató) **erő.**

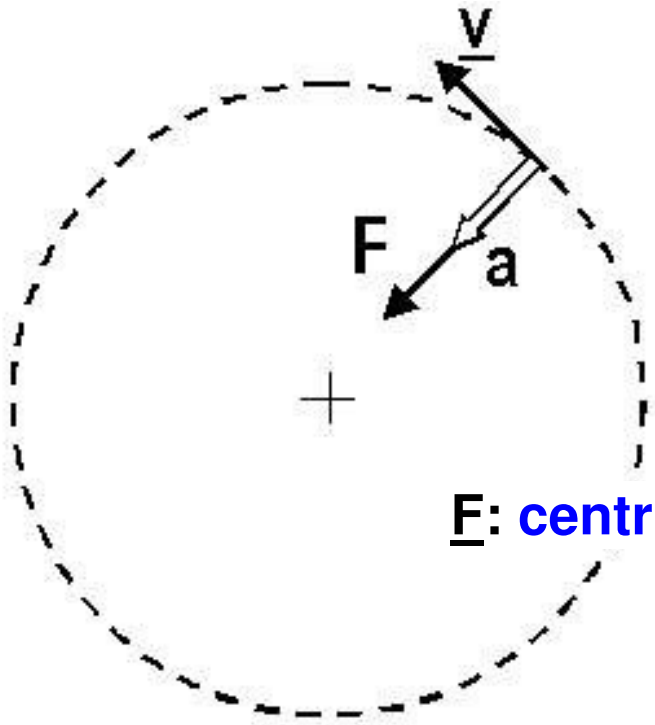
d) Egyenletes körmozgás

$|\underline{v}| = v =$ **állandó** $\rightarrow$ $|\underline{a}|$ **= állandó és**
$\underline{a}$ **a kör középpontja felé mutat**
(ld. a kinematika fejezetet)

$v = r \cdot \omega$ **és** $a = r \cdot \omega^2 = v^2/r$

$\rightarrow$ $|\underline{F}|$ **= állandó,** $\underline{F}$ **a centrum felé mutat**

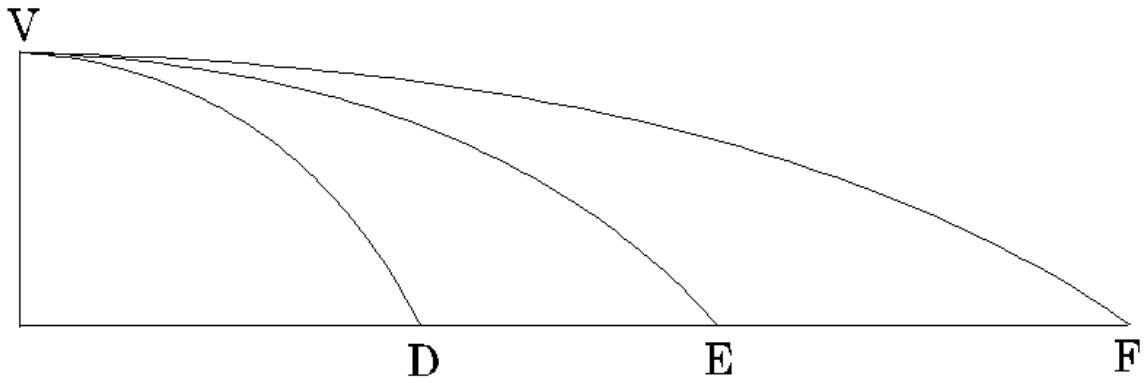
Feltétel: **középpont felé mutató állandó nagyságú erő**



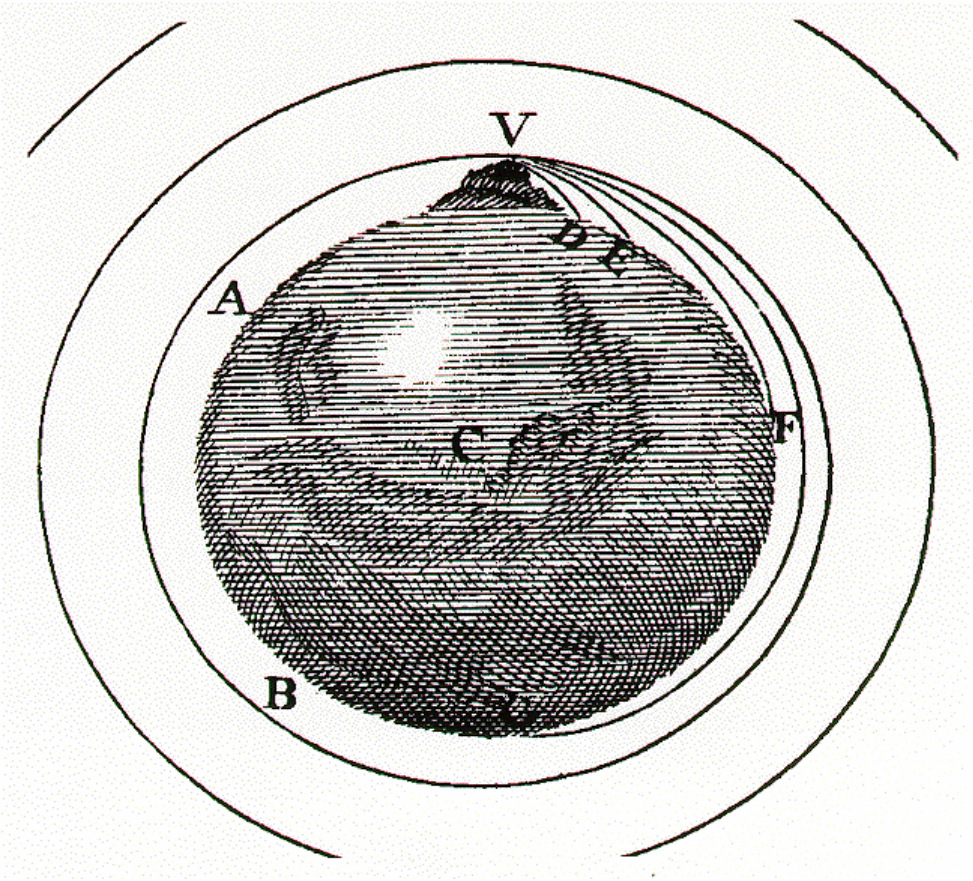
$\underline{F}$**: centripetális erő**

$F_c = m \cdot a = m \cdot v^2/r = m \cdot r \cdot \omega^2$
Biztosíthatja: fonálerő, gravitációs erő, kényszerpálya, stb.

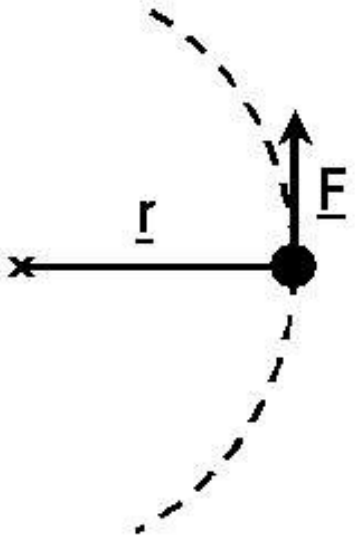
Vízszintes hajítás:



Ugyanez egy hegyről: elég nagy kezdősebességnél „körbeesi a Földet”:



Anyagi pont egyenletesen gyorsuló körmozgása:



$\underline{F}_T = m \cdot \underline{a}_T$

tangenciális irányú erő

$\underline{a}_T \rightarrow$ **tangenciális (érintőirányú) gyorsulás**

$\beta \rightarrow \Delta\omega/\Delta t \rightarrow$ **szöggyorsulás**

$$|\underline{a}_T| = \frac{(\underline{v}_T(t_2) - \underline{v}_T(t_1))}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r \cdot \beta$$

Fontos: a fizikában $\underline{\omega}$, $\underline{\beta}$ is vektorok, amelyek a forgástengely irányába a jobbkéz-szabály szerint mutatnak.

$|\underline{F}_T| = m \cdot |\underline{a}_T| = m \cdot r \cdot |\underline{\beta}| \qquad / \cdot r$

$\rightarrow |\underline{F}_T| \cdot r = m \cdot r^2 \cdot |\underline{\beta}|$

(Teljes erő $\rightarrow \underline{F} = \underline{F}_T + \underline{F}_{Radiális}$)

Az $|\underline{F}_T| \cdot r$ mennyiség a kiterjedt testek mechanikájánál fog később előkerülni!

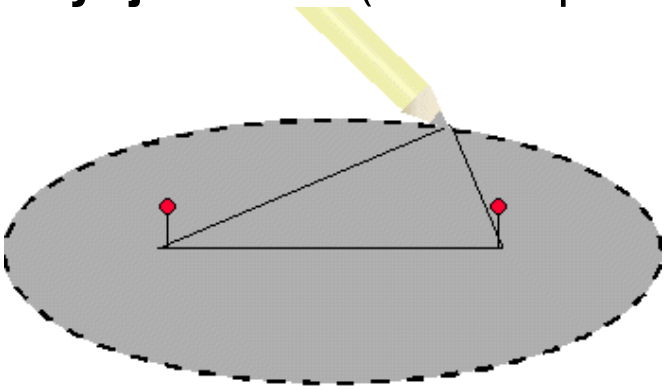
Bolygómozgás

[megfigyelésük: a fizika kiinduló élménye]

Nap → Merkur, Vénusz, Föld, Mars, Jupiter, Szaturnusz, Uránusz (1791), Neptunusz (1846), ~~Plútó (1930)~~

Kisbolygók: Mars és Jupiter között kb. 1600 ismert pályával

Bolygók pályája: ≈ kör (kissé lapult ellipszis)



Az ellipszisnek két gyújtópontja (fókuszpontja) van, az ellipszis bármely pontjára igaz, hogy akét fókusztól mért távolsága összesen konstans.

Az ellipszis nagytengelye („hossza”): *a*, kistengelye („szélessége”): *b*
A lapultságra jellemző mennyiség:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$ **→ numerikus excentricitás.**

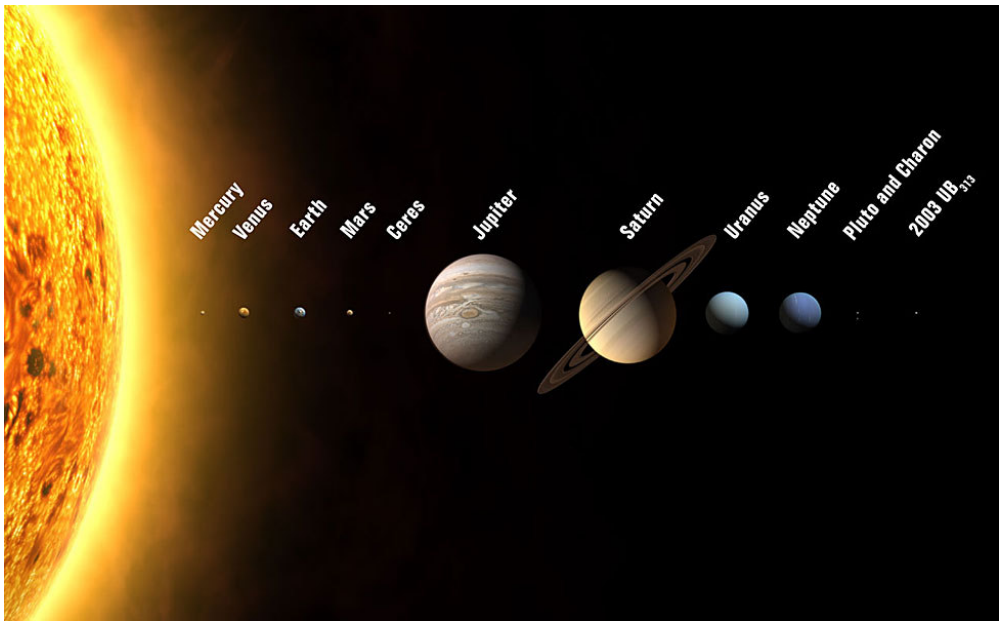
A bolygópályák excentricitása:

Föld: $\varepsilon = 0{,}266 \rightarrow b/a \approx 96{,}4\%$
b=147,1 millió km, a=152,6 millió km

Plútó: (törpebolygó, 2006):
$\varepsilon = 0{,}80 \rightarrow b/a \approx 60{,}3\%$
b=4447 millió km, a=7380 millió km

geocentrikus világkép: ***Ptolemaiosz (2. sz.)***

heliocentrikus világkép:
1473-1543: ***N. Kopernikusz***, Krakkóqwe
1571-1630: J. Kepler, **törvény felismerése**
1546-1601: Tycho Brache:
1609-19: **kísérleti tény: Mars mozgása**



BOLYGÓ	*Hold, gyűrű*	*Távolság (MKM)*	Év *(FÖLD=1)*	Átmérő *(KM)*	szín	*NAP HOSSZA (< ell. ir.)*	*GRAVI-TÁCIÓ*
Merkur	**0**	**57,9**	**0,24**	**4878**	**narancs**	**58n15:30**	**0,37**
Vénusz	**0**	**108,2**	**0,62**	**12104**	**sárga**	**243n0:32(<)**	**0,88**
Föld	**1**	**149,6**	**1,00**	**12756**	**kék**	**23:56**	**1,00**
Mars	**2**	**227,9**	**1,88**	**6794**	**vörös**	**24:37**	**0,38**
Jupiter	**$16^{GY.}$**	**778,3**	**11,86**	**142984**	**sárga**	**9:50**	**2,64**
Szaturnusz	**$18^{6GY.}$**	**1427**	**29,46**	**120536**	**sárga**	**10:39**	**1,15**
Uránusz	**$15^{GY.}$**	**2870**	**84,01**	**51118**	**zöld**	**17:14(<)**	**0,93**
Neptunusz	**$8^{GY.}$**	**4497**	**164,8**	**50530**	**kék**	**16:3**	**1,22**
Plutó (2006 törpeb.)	**1**	**5913**	**248,5**	**2290**	**sárga**	**6n9:18(<)**	**0,06**
Hold	**0,384 (356-405)**		**29.53 nap**	**3475**	**kráterek**	**u.az arc**	**0,16**
Nap	**H: 73,46% He: 24,85% > 0,01%**		**m= $=1.99\cdot10^{27}$t**	**1.39 Mkm**	**$T_{felszín}$= $=5700C^{o}$ T_{folt}=4000**		**27,9**

Kepler törvényei

1. **A bolygók ellipszispályán keringenek, az ellipszis egyik fókuszában a Nap van.**
2. **A Naptól a bolygóhoz húzott sugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.** *(Ennek oka, hogy centrális erő hat)*
3. **Bármely két bolygó keringési idejének négyzete úgy arányik egymáshoz, mint az ellipszispályáik nagytengelyének köbei.**

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \rightarrow \mathbf{r^3/T^2 = állandó = C_N}$$

Bolygómozgás ≈ egyenletes körmozgás

(csak közelítőleg!)

$$\mathbf{F = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot (2\pi/T)^2 = 4\pi^2 \cdot m \cdot r/T^2}$$

Kepler szerint viszont:

$$\mathbf{r/T^2 = (r^3/T^2)/r^2 = C_N/r^2}$$

Tehát a bolygókra ható erő:

$$\mathbf{F = 4\pi^2 \cdot m \cdot r/T^2 = 4\pi^2 \cdot C_N \cdot (m/r^2)}$$

a Napra ugyanekkora erő hat (akció–reakció).
Ebből pedig következik, hogy a gravitációs erő:

$$\mathbf{F_{GRAV} = G \cdot (m_1 \cdot m_2)/r^2}$$

Ez a gravitáció törvénye. – Általános-e ez?

$\mathbf{m_{tehetetlen} = m_{gravitációs}}$ **Eötvös Loránd mérései**

Newton gravitációs törvénye:

– Minden részecske vonzó hatással van minden másik testre az alábbi erővel:

$$\underline{F}_{GRAV} = G \cdot (m_1 \cdot m_2)/r^2 \cdot \underline{e}$$

$\underline{e}$ → a két testet összekötő egyenes irányába mutató egységvektor
m_1, m_2 → a testek tömegei
r → távolság
$G = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}$ [Nm^2/kg^2]
→ gravitációs állandó

A Föld tömege (M_F) kiszámítható, ha G ismert (laboratóriumi mérésekből)**, a Föld sugara (R_F) és a g gravitációs gyorsulás ismert:**

Az *m* tömegű test súlya:

$$F = m \cdot g = G \cdot (M_F \cdot m)/R_F^2$$

$$\rightarrow M_F = (g \cdot R_F^2)/G$$

Felhasználva, hogy

$g = 9{,}81\ m/s^2$ és $R_F = 6373$ km

$$\rightarrow M_F = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$$

Műholdak mozgása ≈ körpályán.
Mekkora egy *m* tömegű műhold sebessége?
A centripetális erő itt a gravitációs erő:

$F_c = G \cdot (M_F \cdot m)/r^2 = m \cdot (v^2/r)$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_F}{r}}$$

(r a körpálya sugara)
akkor van körpályán, ha a sebesség ennyi.
A sebesség a műhold *tömegétől független!*

Keringési idő: $T = (2\pi \cdot r)/v$

A műhold sebessége: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_F}{r}} = (2\pi \cdot r)/T$

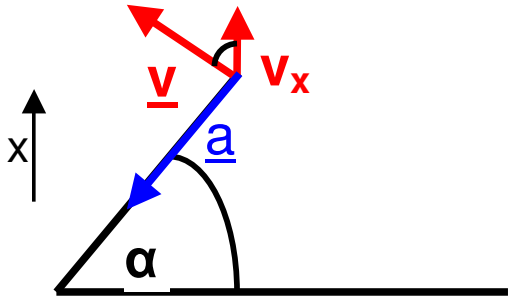
Átrendezve: $T = (2\pi \cdot r^{3/2})/(G \cdot M_F)^{1/2}$
innen pedig $r^3/T^2 = G \cdot M_F/(4\pi^2) =$ **állandó**
[Ez Kepler harmadik törvénye!]

Geostacionárius pálya: a műhold az egyenlítő felett mindig ugyanott látszik.

[23^h 56' → ez az egyszeri körbefordulás ideje, a Föld sebessége a pályáján ≈ 30km/s, Nap mozog az állócsillagokhoz képest]

e) Harmonikus rezgőmozgás

Láttuk:



α_0: kezdeti szöghelyzet

$$x = A \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

$$v_x = v \cdot \cos(\alpha_0 + \omega \cdot t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

$$a_x = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

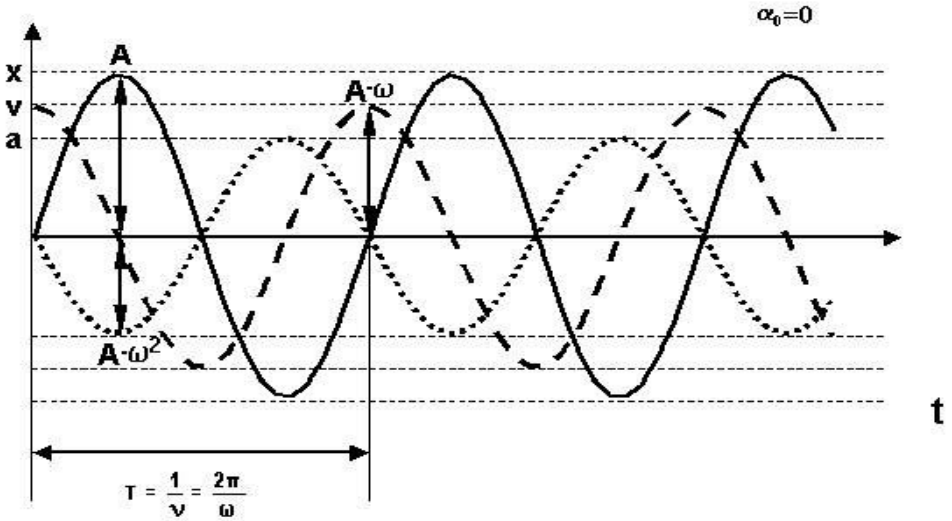
Mekkora a tömegpontra ható erő, ha így mozog?

$$|\underline{F}| = |\underline{a}| \cdot m = -m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t) =$$

$$= -(m \cdot \omega^2) \cdot A \cdot \sin(\alpha_0 + \omega \cdot t) = -k \cdot x$$

Dinamikai feltétel: a mozgás egyenesében a *középpont felé* irányuló, az attól való távolsággal *arányos* erő hasson!

Példa: rugó stb.



Fontos: *kis kitérések* esetén nagyon sokféle mozgás közelítő így. Sokszor előfordul a természetben! (pl. vízhullámok)

2.5. Látszólagos erők nem-inercia rendszerekben

Nem-inercia rendszer: a mozgásállapot értelmes ok (kölcsönhatás) nélkül változik.

A mindennapi életben előforduló rendszerek általában ilyenek

Példák: – gyorsuló lift
– gyorsuló vonat
– leszálló repülőgép
– kanyarodó autó
...

Módszer a látszólagos erők bevezetésére:
rendszer a gyorsulása esetén
(– m · a) tehetetlenségi erőt kell figyelembe venni a mozgás leírásához
(a „tényleg" ható erőkön kívül!!!)

Példa: súlytalanság esete az űrhajón
(ha az a Föld körül körpályán kering):
a *tehetetlenségi* erő (centrifugális erő) és a *gravitációs* erő éppen kiegyenlíti egymást

Az egyenletes körmozgásnál két jellegzetes látszólagos erő lép fel, mert a *megfigyelési rendszer gyorsul!*

- **A centrifugális erő**

nagysága: $|F| = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot v \cdot \omega$

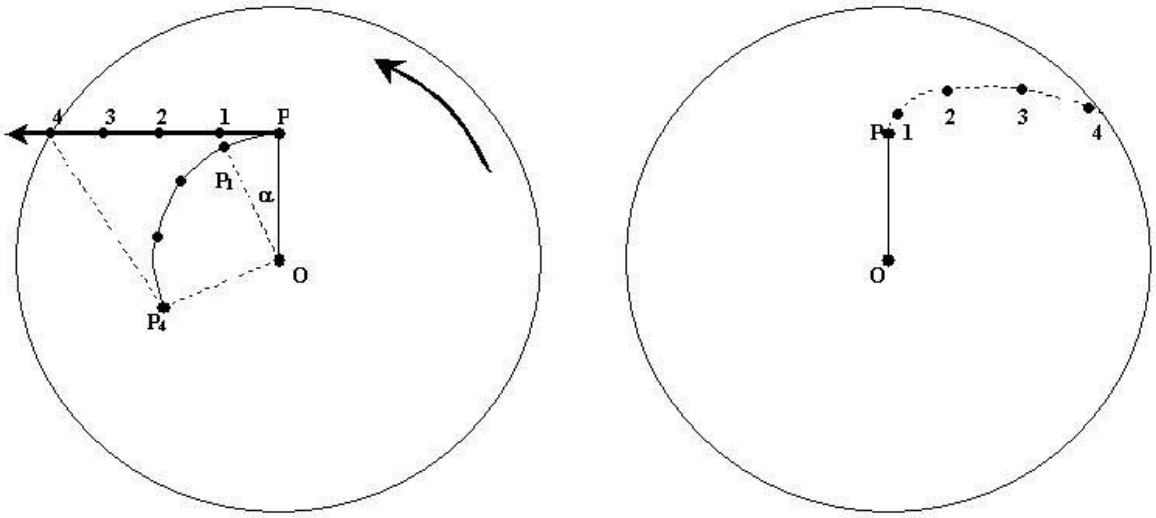
sugárirányban *kifelé* irányuló, *látszólagos* erő

Nem a centripetális erő ellenereje!

(hiszen másik megfigyelési rendszerben értelmezettek)

Példák: **- kanyarodó busz**
- körhinta
- a Föld forgása → |g| változik a földrajzi szélességgel

- **A Coriolis-erő *[Gaspard G. de Coriolis, 1792-1843]. Forgó rendszerben lép fel. 1851*: Foucault ingakísérlete**

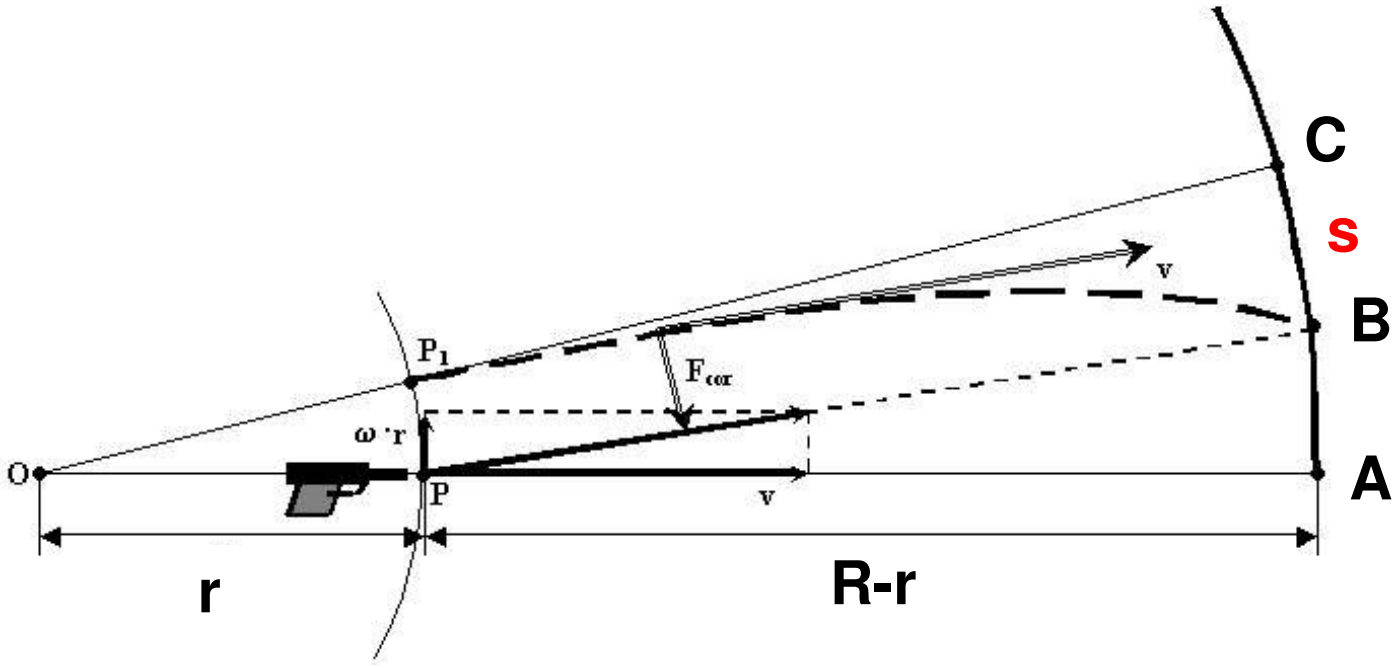


a *b*

inerciarendszerből **forgó rendszerből**

nézve *(animáció!)*

A pisztolygolyóra nem hat erő, pályája mégis elhajlik *(a Föld forgó rendszerében):*



Számítsuk ki, hogy a forgó rendszerben mennyivel hajlik el a golyó pályája!

$v \cdot t = R-r \quad \rightarrow \quad t=(R-r)/v$

$AC = R \cdot \omega \cdot t$

$AB = (R-r) \cdot \omega \cdot r/v = r \cdot \omega \cdot t$

$s = AC - AB = (R-r) \cdot \omega \cdot t$ (tipikusan ≈1mm)

Ezt pedig a Coriolis-gyorsulásnak tulajdonítjuk: $s = (a_{cor}/2) \cdot t^2$ **(!)**

A fentivel összehasonlíva, kifejezve a_{cor}-t:

$a_{cor} = 2 \cdot s/t^2 = 2 \cdot \omega \cdot (R-r)/t = 2 \cdot v \cdot \omega$

Tehát a *Coriolis-erő* nagysága:

$$|\underline{F}_{cor}| = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega$$

A Coriolis-erő elhajlítja a szabadon mozgó test pályáját. Az erő *irányа* a forgástengely és a sebesség *irányára* is merőleges.
A forgástengellyel egyirányba mozgó testre nem hat a Coriolis-erő.

Példák:

- **az északi (déli) féltekén a sebesség irányától jobbra (balra) eltérülés**
- **függőlegesen lefelé eső tárgy kelet felé eltérül** (47°-on 100 m esésnél 1,5 cm)
- **Eötvös-effektus: nyugat (kelet) felé mozgó tárgyak súlynövekedése (súlycsökkenése)**
- **környezettudomány: a Föld szélrendszereinek kialakulása**
- **tengeráramlások befolyásolása**

Hogyan jellemezhetjük a Coriolis-erő „eltérítő hatását”? Ha egy test t ideig mozog v sebességgel, L utat megtéve:

$t = L/v$ **és** $a_{cor} = 2 \cdot v \cdot \omega$ $\rightarrow$ **az s eltérülés:**

$s = a_{cor} t^2/2 = \omega \cdot L^2/v.$

Az eltérülés és az elmozdulás aránya:

$$s/L = \omega \cdot L/v.$$

Ez a *szám* mondja meg, hogy mennyire tér el egy adott rendszer az inerciarendszertől.

Példák:

- **Egy Budapesten lévő ≈10m méretű asztalon ≈1m/s tipikus sebességgel mozgó eszközökkel kísérletezünk: kb. inerciarendszer; az eltérés ≈0,05%**

- **Hatás növekszik a távolsággal! Légköri mozgásoknál v≈10 m/s. → 1km-nél 0,5%, 100 km-nél 50%, 1000km-nél 500% eltérülés!**

- **Folyók az északi féltekén a jobb partot erősebben mossák (r>10km-nél látszik)**

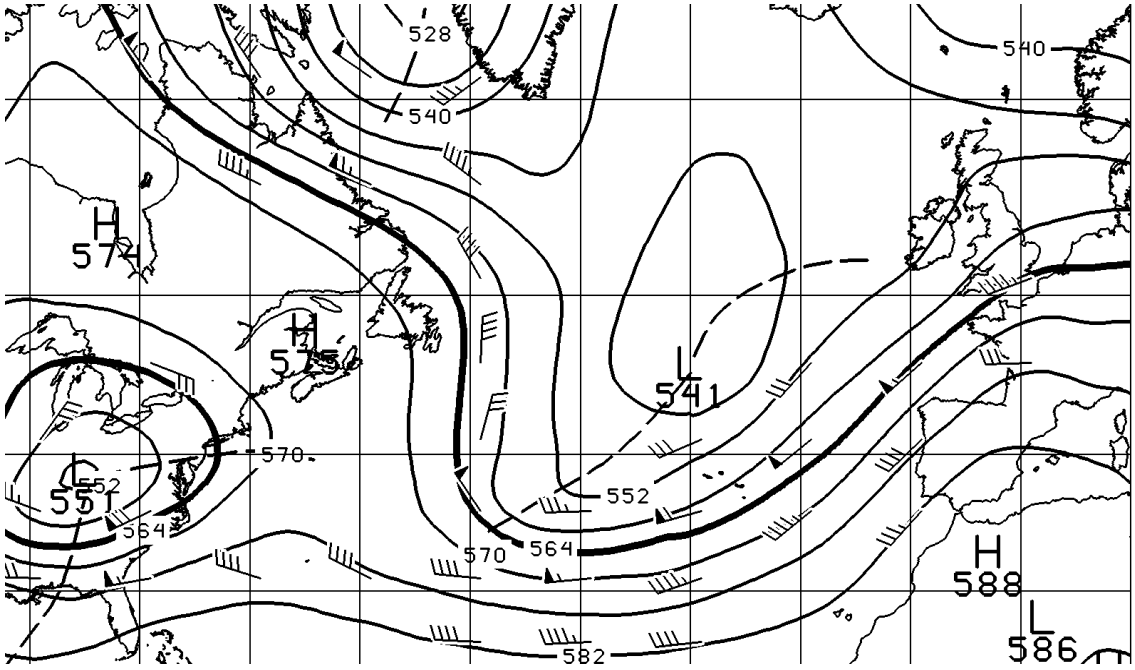
- **1915: Falklandi céltévesztés** (német-angol vízicsata)**: „balra húzó" lövedék, pedig volt Coriolis-erőt kompenzáló berendezésük!**

- **Légköri mozgások:**

Nagy méretskálán tehát a Coriolis-erő a legfontosabb (szélnél és tengeráramlásnál).

A szél *nem* a nyomáskülönbség irányába fúj! A nyomáskülönbség épp a Coriolis-erőt ellensúlyozza.

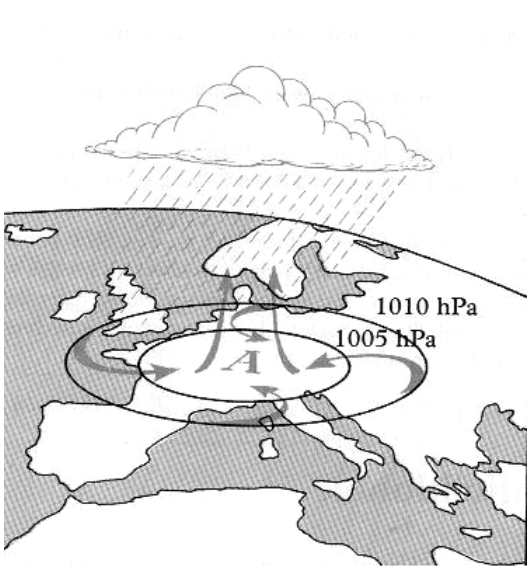
A szélirány nem merőleges az izobárokra, hanem éppen párhuzamos velük:

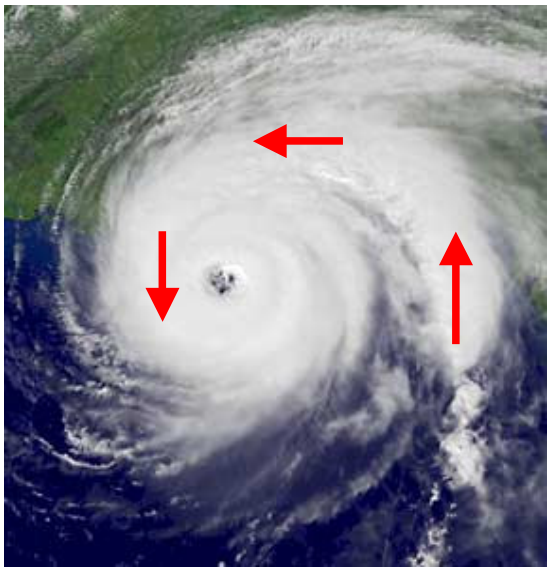


Ciklonok: alacsony légnyomású időjárási képződmények.

A középpont felé tartó áramlás jobbra kanyarodik (északi félteke)**.**

A nyomáskülönbség egyensúlyt tart a Coriolis-erővel:





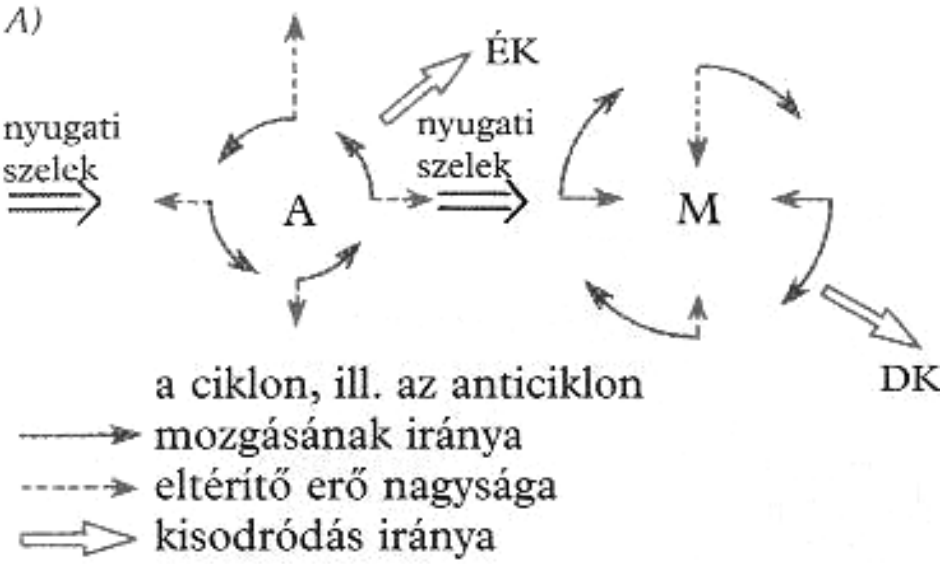
Szelek: vízszintes légmozgások, Coriolis-erő, súrlódás hat

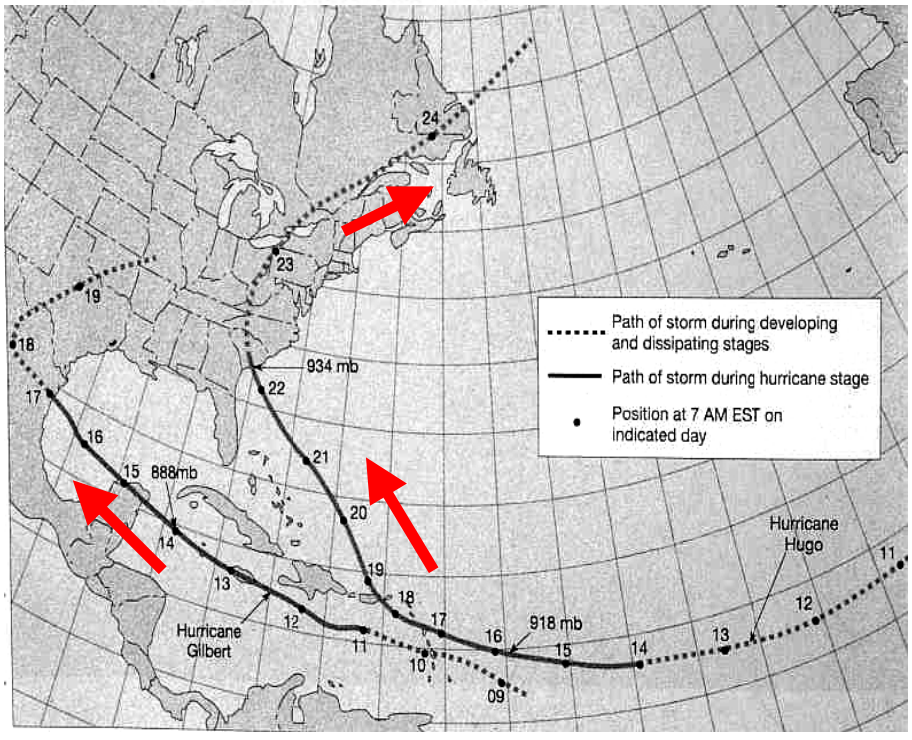
A vízszintes irányú Coriolis-erő a sarkokon a legnagyobb, az egyenlítőn nulla.

Hogyan mozog egy mérsékelt égövi ciklon?

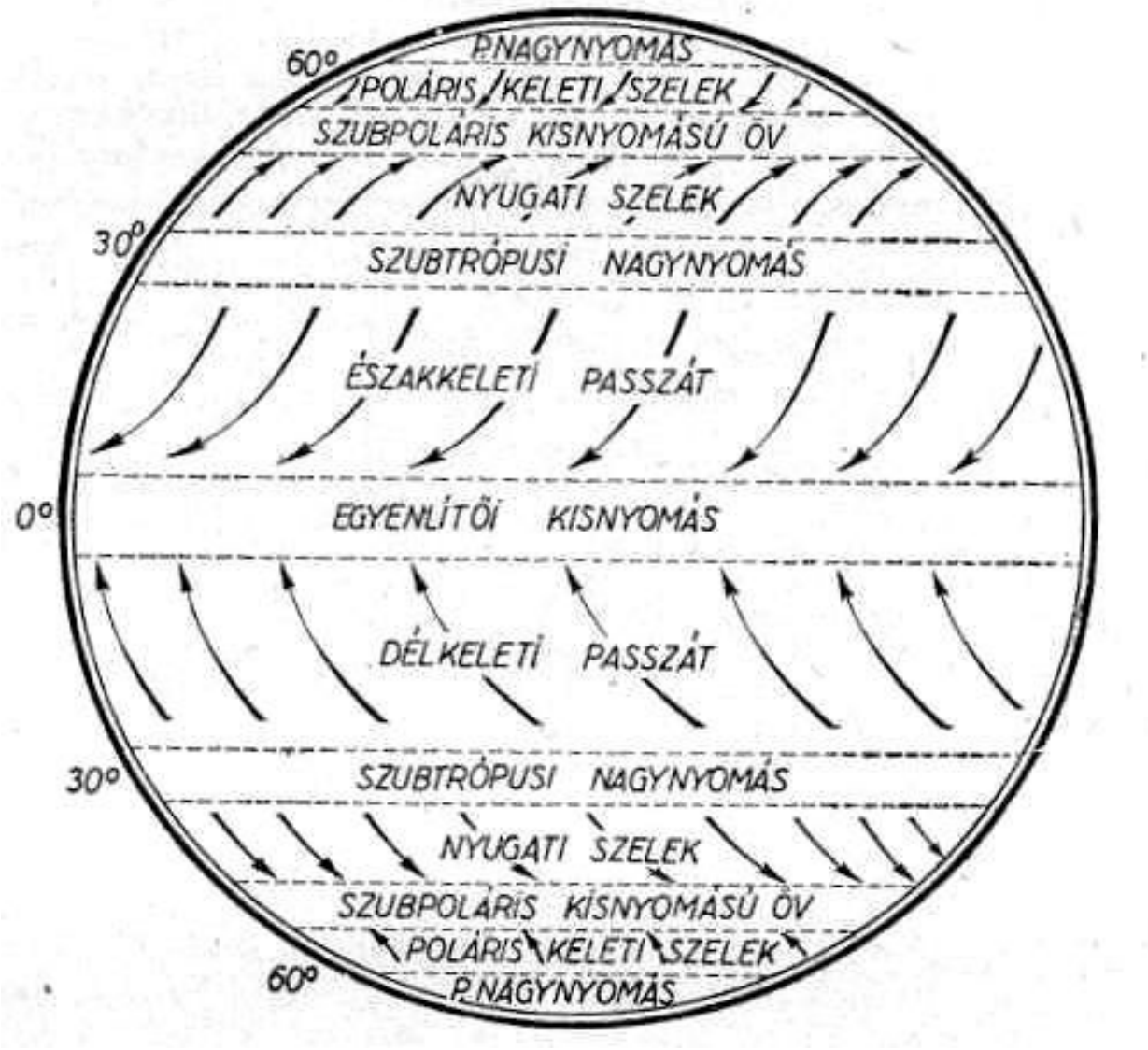
A passzátszelek nyugat felé sodorják (trópusokon), majd a mérsékelt égövben a nyugati szél keletre sodorja őket.
De mitől mozognak északra?

A Coriolis-erő észak felé nő (északi félteke)**:**





Földi szélrendszerek:



Bonyolult rendszer: több erő hatása
Erők származása:

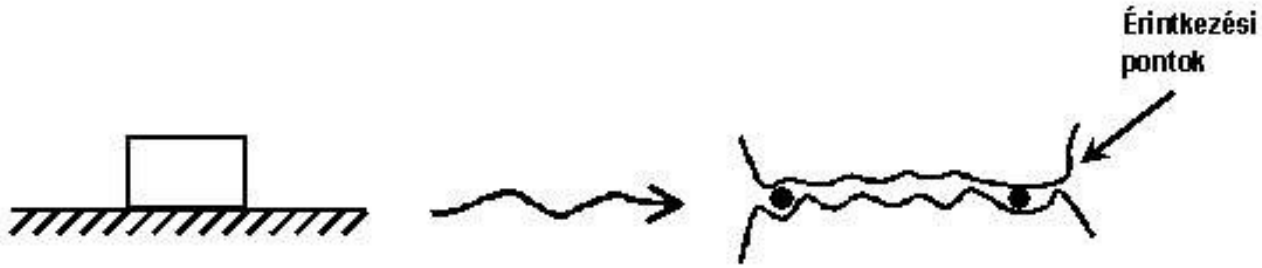
- **nyomáskülönbség,**
- **Coriolis-erők (forgás miatt)**
- **súrlódó erők**

Ezek alakítják a fő szélmozgási zónákat
Földtudományban fontos szerep!

Súrlódási erő

– Mozgatási erőnek ellenálló erő: *statikus* súrlódási erő (*tapadási* súrlódás)

– Felületen mozgó testre a mozgás irányába ható erő: *csúszási* súrlódás



Felületre merőleges erő (*normális* erő): F_N

Súrlódási erő:

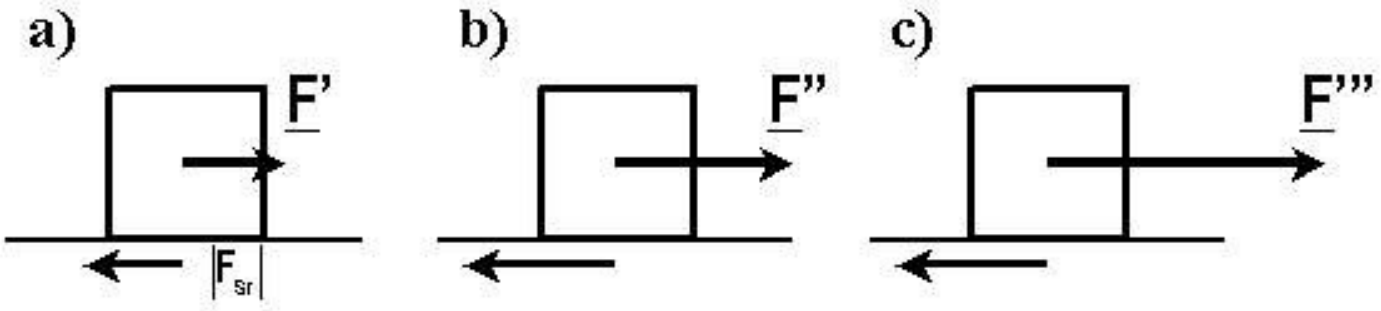
Ha ellenáll: $|\underline{F}_T| < \mu_T \cdot |F_N|$
(μ_T: tapadási súrlódási együttható)

Ha csúszik: $\underline{F}_S = \mu_S \cdot |F_N| \cdot \underline{e}$ ($\underline{e}$: egységvektor)
(μ_S: csúszási súrlódási együttható)

általában: $\mu_T > \mu_S$

$\underline{F}_S$ a felülettel *párhuzamos*, a mozgással *ellentétes irányú* erő

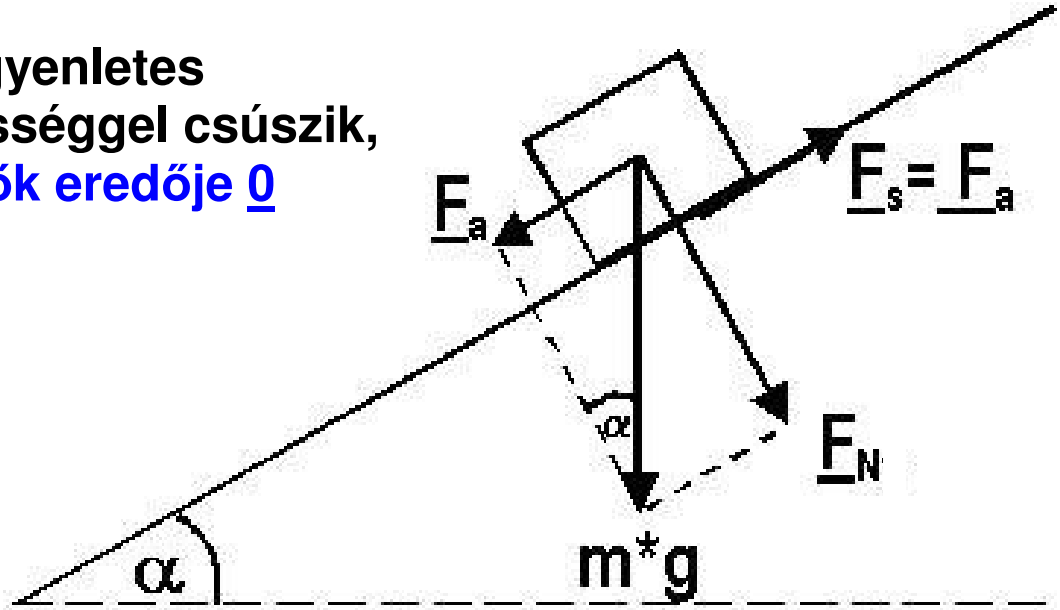
áll | épp még áll | gyorsul



$|\underline{F'}|=|\underline{F_T}|<|\underline{F_N}|\cdot\mu_T$ $|\underline{F''}|=|\underline{F_N}|\cdot\mu_T$ $|\underline{F'''}|>|\underline{F_N}|\cdot\mu_S$

Lejtő:

Ha egyenletes sebességgel csúszik, az erők eredője 0



$\underline{F_S} = -\underline{F_a}$, ahol $|F_a| = m\cdot g\cdot\sin\alpha$

A nyomóerő: $|F_N| = m\cdot g\cdot\cos\alpha$

Ebből:

$|F_S| = \mu_S\cdot|F_N| = \mu_S\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha = m\cdot g\cdot\sin\alpha$

$\rightarrow \quad \mu_S = \operatorname{tg}\alpha$

Példa: csúszó szánkó $\mu_S = 0{,}05$

álló szánkó $\mu_T = 0{,}35$

3. MUNKA, ENERGIA, TELJESÍTMÉNY, LENDÜLET

Fizika központi fogalmai.
Mindegyik fogalom létezik a köznyelvben is (de mást jelent, mint a fizikában)!

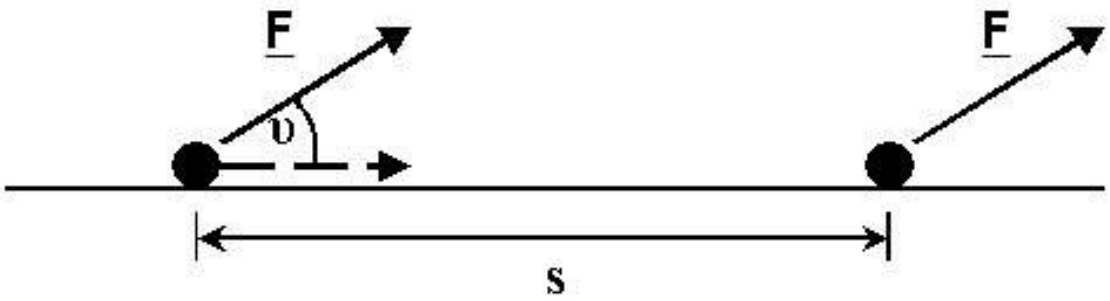
3.1. A munka definíciója: ha az F erő a tömegpontot az erő irányában s távolságra elmozdítja, akkor $W = F \cdot s$ *munkát* végez.
A munka skalár mennyiség (nincs iránya).
Egysége (SI rendszerben):

1 J (joule) **= 1 N · 1 m = 1 kg · 1 m^2/s^2 =** $\left[kg \cdot \frac{m^2}{s^2} \right]$

[James JOULE, 1818-1889.]

Levezetett mennyiség:
1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J = 3,6 MJ

Általában, ha az F és s vektorok υ szöget zárnak be, akkor a munka: $W = F \cdot s \cdot \cos \upsilon$



Megjegyzések:

Vektorok skalárszorzata

(Pl. a munka definíciójában erre van szükség:

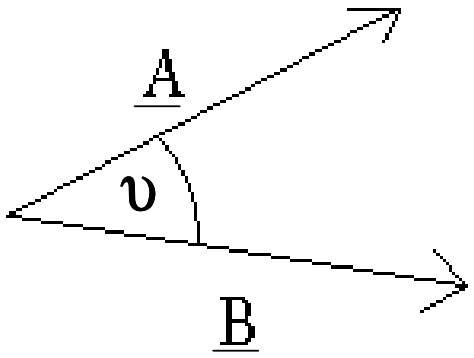
$$W = |\underline{F}| \cdot |\underline{s}| \cdot \cos \upsilon \ )$$

Az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ vektorok skalár szorzata:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot \cos \upsilon$$

ahol υ a vektorok által bezárt szög.

Az eredmény (szorzat) tehát egy szám (skalár).



A skalár szorzat tulajdonságai:

Kommutatív: $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$

Disztributív: $\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$

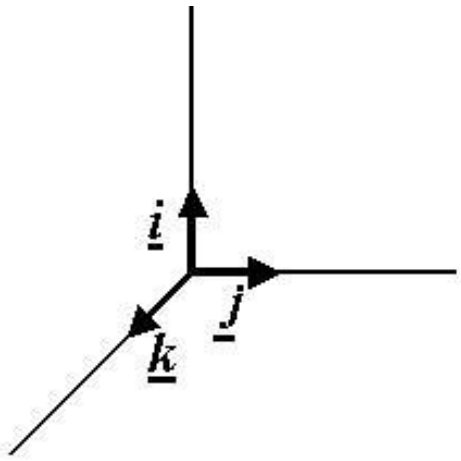
(házi feladat ezt a definíció alapján bizonyítani)

Fontos, hogy $\cos \upsilon = 0$, ha $\upsilon = 90°$

→ merőleges vektorok skalár szorzata = 0

Hogyan számíthatjuk ki a skalár szorzatot, ha a két vektor komponenseit (koordinátáit) ismerjük?

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ egymásra *merőleges* egységvektorok:



$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0$$

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$$

Ezek segítségével írjuk fel a vektorokat a komponenseikkel:

$$\underline{A} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} + a_3 \cdot \underline{k}$$

$$\underline{B} = b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j} + b_3 \cdot \underline{k}$$

Alkalmazzuk a fenti azonosságokat és a disztributív tulajdonságot:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

A skalárszorzat tehát kiszámítható a megfelelő koordináták szorzatának összegeként!

A munka pozitív és negatív is lehet, ha az erő és az elmozdulás egymással egyirányú illetve ellenkező irányú.

Példa: súlyemelő: felfelé pozitív az általa végzett munka, lefelé negatív

3.2. Munka és energia

Vegyünk egy súrlódásmentesen mozgó testet, melyre F erő hat. A végzett munka:

$$F \cdot s = (m \cdot a) \cdot s$$

(**a** a test gyorsulása, **m** a tömege)

Ha F állandó:

$$a = (v_1 - v_0)/t; \quad s = [(v_1 + v_0)/2] \cdot t$$

Így: $a \cdot s = [v_1 - v_0] \cdot [(v_1 + v_0)/2] =$

$$= 1/2 \cdot v_1^2 - 1/2 \cdot v_0^2$$

$$\rightarrow \quad F \cdot s = m \cdot v_1^2/2 - m \cdot v_0^2/2$$

Tehát:

munka = (végső – kezdeti) *mozgási energia*

ahol a mozgási (kinetikus) energiát így definiáljuk:

$$E_{KIN} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$$

SI egysége: J (Joule) **=** $[kg \cdot m^2/s^2]$

Kinetikus energiatétel:

Ha az erők *eredője* egy testen W munkát végez, akkora test mozgási energiája:

$$W = E^K_{VÉGSŐ} - E^K_{KEZDETI} = m \cdot v_1^2/2 - m \cdot v_0^2/2$$

Ez akkor igaz, ha más típusú energiává nem alakul át a mozgási energia.
Anyagi pontra igaz; a kiterjedt testek ezekből épülnek fel → igaz azokra is.

Fontos: az *eredő* erőt kell figyelembe venni.

pozitív munka: nő a mozgási energia
negatív munka: csökken.

Példák:

– **gyorsuló űrhajó,**
– **lesikló síelő,**
– **műhold kör és ellipszis pályán, stb.**

A gravitációs erő munkája:

$\underline{F_g} = m \cdot \underline{g} \rightarrow W = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0)$

ahol $h_1 - h_0$ a test magasságváltozása

(ha $h_1 - h_0$ kicsi, akkor g változása elhanyagolható)

Gravitációs potenciális energia tehát:

$$E^P = m \cdot g \cdot h$$

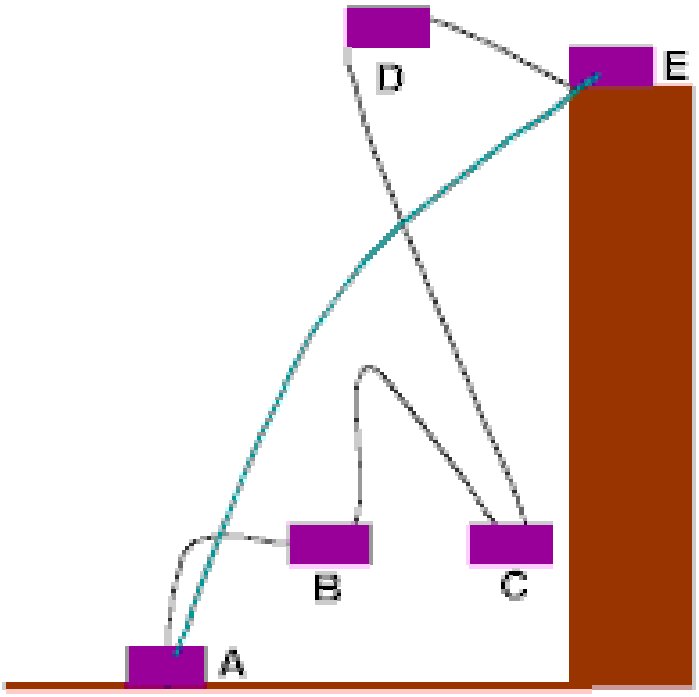
3.3. Konzervatív és nem-konzervatív erők

Konzervatív erő (erőtér): **A** és **B** pont közötti elmozdulásnál a végzett **munka** **nem függ az útvonaltól,** csak az A és B pontok helyétől (ha A = B, akkor W = 0).

Példák:

- gravitációs erő
- rugóerő
- elektrosztatikus erők.

Ezeknél a **potenciális energia** értelmezhető!



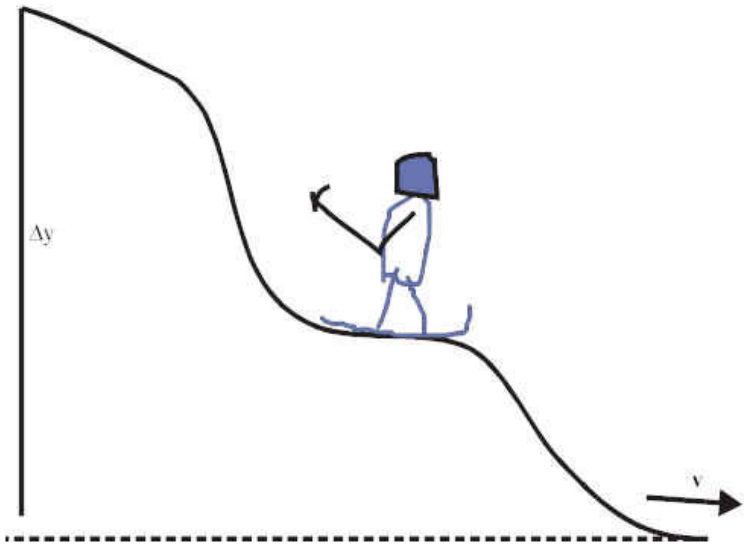
Az A→B→C→D→E úton ugyanannyi munkát végzünk, mint az A→E útvonalon.

Nem-konzervatív erő (erőtér): a végzett munka függ az útvonaltól.

Példák:

- **csúszási súrlódás,**
- **légellenállás,**
- **rakéta hajtóereje.**

A síelő nagyobb sebességgel éri el a lejtő alját, ha lankásabb utat választ, mintha meredek utat választ ugyanabba a célpontba igyekezve, ha súrlódás is van.



Ilyen esetekben NEM értelmes potenciális energiáról beszélni.

A nem-konzervatív erők által végzett munka:

$$W_{NK} = (E^K_{VÉGSŐ} - E^K_{KEZDETI}) + (E^P_{VÉGSŐ} - E^P_{KEZDETI})$$

(kinetikus energiaváltozás)+(potenciális energiaváltozás)

(Konzervatív erőtérben ez mindig nulla.)

3.4. A mechanikai energia megmaradása

Ha csak gravitációs erő hat, akkor:

$W_{NK} = 0 = (E^K_V - E^K_K) + (E^P_V - E^P_K)$

Ezt átrendezve: $E^K_V + E^P_V = E^K_K + E^P_K$

Tehát az összenergia nem változik:

$\rightarrow E^K + E^P = m \cdot v^2/2 + m \cdot g \cdot h =$ **állandó.**

Ha van súrlódás, akkor ez nem igaz!

- **lassul a hinta,**
- **megáll a jégkorong,**
- **véges a műholdak élettartama.**

Megmaradási tételek: nagy gyakorlati jelentőségük van → iránymutatók

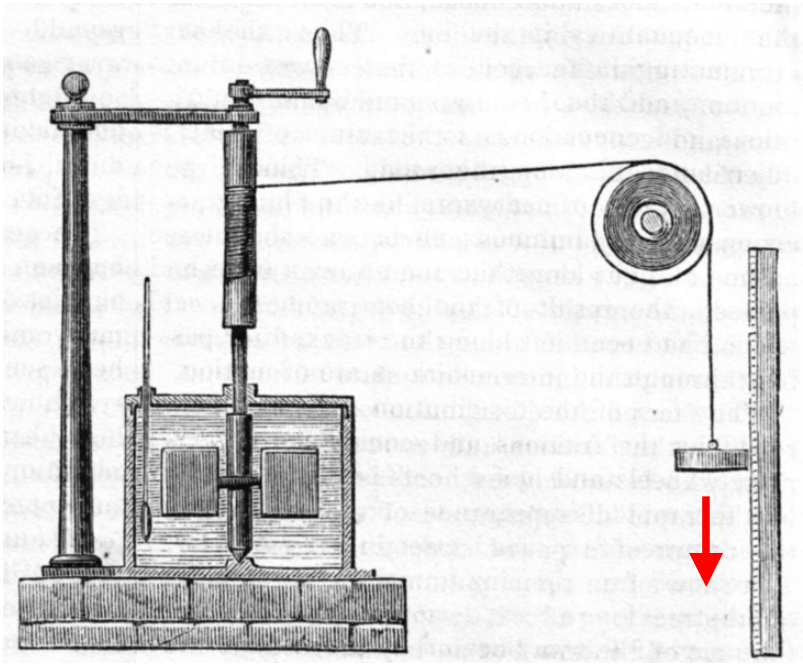
Példamegoldás:

- **konzervatív és nem-konzervatív erők azonosítása**
- **a nem-konzervatív erők munkája 0, ha merőlegesek az elmozdulásra**
- **viszonyítási pont kijelölése: potenciális energiát ehhez képest tekintjük**
- **mozgásállapot meghatározása: mechanikai energia megmaradását felírva**

Az energia megjelenési formái:

- **potenciális (pl. gravitációs) energia,**
- **mozgási energia,**
- **elektromos, mágneses energia,**
- **termikus energia** (részecskék **hő**mozgása),
- **kémiai energia (pl. égéshő),**
- **atommag-energia,**
- **....**

Mai fizikában: energia nem keletkezik és nem lehet megsemmisíteni, csak átalakul.
(pl. energia – tömeg ekvivalencia: $E=mc^2$)
Később visszatérünk rá!



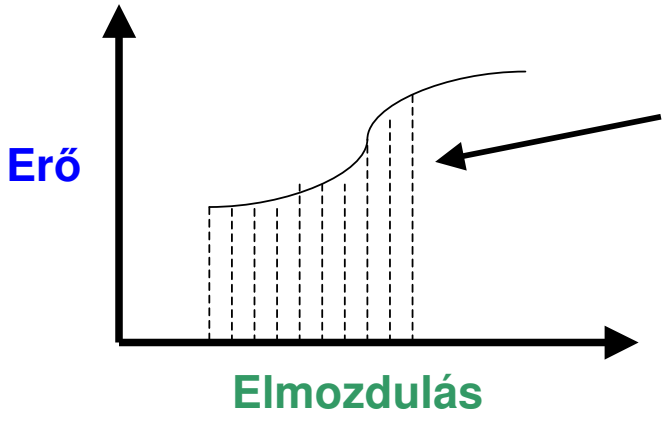
A képen mechanikai energia alakul át termikus energiává: a folyadék felmelegszik (*James Joule, 1843*).

Változó erő munkája

Általában: erő az elmozdulás alatt változik (nagysága és iránya is)

Pl.: íj megfeszítése

Hogyan számítjuk ki ilyenkor a munkát?



Elemi munka:
$\Delta W = F \cdot \Delta s$

Az elemi munkák (a kis téglalapok területének) **összege:**

$$W \approx \sum_i F_i \cdot \cos \upsilon \cdot \Delta s$$

pontosabban integrálni kell:

$$W = \int F(s) \cdot \cos \upsilon \cdot ds \quad [s_1 \text{ és } s_2 \text{ között}]$$

Példa: rugó kihúzása:

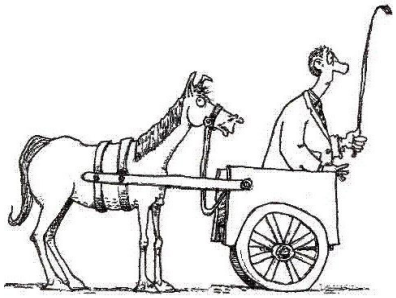
$F = -k \cdot x$. Ekkor az *A* megnyúláshoz szükséges munka:

$$W = \int_0^A k \cdot x \cdot dx = \left[\frac{1}{2} k \cdot x^2 \right]_0^A = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

3.5. Teljesítmény

Definíció: $P = \Delta W/\Delta t$ = **munka/időtartam**

Egység: [J/s] = **W** (watt)
[James WATT, 1736–1819]
Régi egysége: 1 lóerő = 736 W



Példa: állandó F erő, a test az erő irányában elmozdul:

munka/idő = $(F \cdot s)/t = F \cdot v$

A teljesítmény fogalmát az élet sok területén használják.

Energetika: az emberiség mai problémáinak egyik legfontosabbika *(visszatérünk rá a Környezetfizika tantárgynál)*

Az emberiség energia-fogyasztása (2002):
434 EJ/év (exajoule)
(1 EJ = 10^{18} J)

Ez mekkora teljesítménynek felel meg?
$P \approx 1{,}38 \cdot 10^{13}$ W ≈ 14 TW (terawatt)
(fejenként 2300 W)

3.6. A lendület és erőimpulzus

Definíciók:

- **Lendület: $\underline{p} = m \cdot \underline{v}$** (tömeg és sebesség szorzata)
  vektormennyiség. Egysége: [kg·m/s]
  (régi – ma is használt – neve: impulzus)

- **erőimpulzus,** erőlökés**: $\underline{I} = \underline{F} \cdot \Delta t$**
  vektormennyiség. Egysége:
  $N \cdot s = [kg \cdot m/s^2] \cdot s = kg \cdot m/s$

Newton II. törvényét alkalmazva:

$$\underline{a} = \Delta\underline{v}/\Delta t = (\underline{v}_1 - \underline{v}_0)/\Delta t$$

$$\rightarrow \quad F = m \cdot \underline{a} = m \cdot (\underline{v}_1 - \underline{v}_0)/\Delta t$$

$$\rightarrow \quad \underline{F} \cdot \Delta t = m \cdot \underline{v}_1 - m \cdot \underline{v}_0 = \Delta \underline{p}$$

Az eredő $\underline{F}$ erő erőlökése megegyezik a test lendületének megváltozásával!

Példák:

- **fejelő focista: mekkora a labdára ható erő, ha $\underline{v}_1$, $\underline{v}_0$ és Δt ismert?**

- **zuhogó eső: mekkora erő hat a kocsira, ha ismert $\underline{v}_0$ és $\Delta m/\Delta t$?**
- **jégeső, ahol a szemek visszapattannak ($\underline{v}_0$, $\underline{v}_v$, $\Delta m/\Delta t$). Mekkora az erő?**

4. ANYAGPONT-RENDSZEREK. A MEREV TEST EGYENSÚLYA, MOZGÁSA. A PERDÜLET

Megpróbáljuk az eddig tömegpontokra megtanultakat pontrendszerekre, kiterjedt testekre is kiterjeszteni.

4.1. Anyagi pontokból álló rendszerek

A fizika (legtöbbször) egymással kölcsönhatásban lévő, anyagi pontokból álló rendszereket vizsgál.

→ vannak belső erők és külső erők.

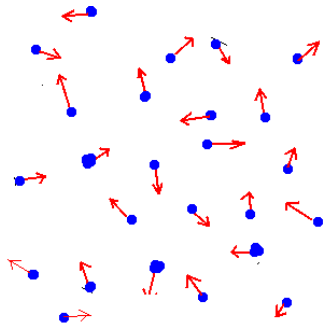
Belső erő: a rendszerhez tartozó objektumok (anyagi pontok) között hat

Külső erő: a rendszerhez tartozó és a rendszerhez nem tartozó objektumok között hat

Példák belső erőkre:

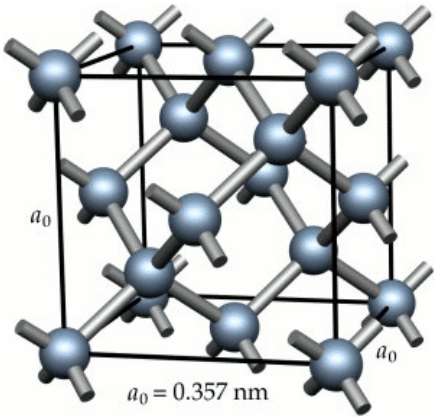
- **Nap és bolygók (gravitáció),**
- **ütköző golyók (ütközéskor fellépő erő),**
- **felrobbanó lövedék (robbanószer ereje).**

– **Szabad anyagi pontrendszer:**
kényszerek nem korlátozzák



– **Kötött pontrendszer:**
kényszerek korlátozzák

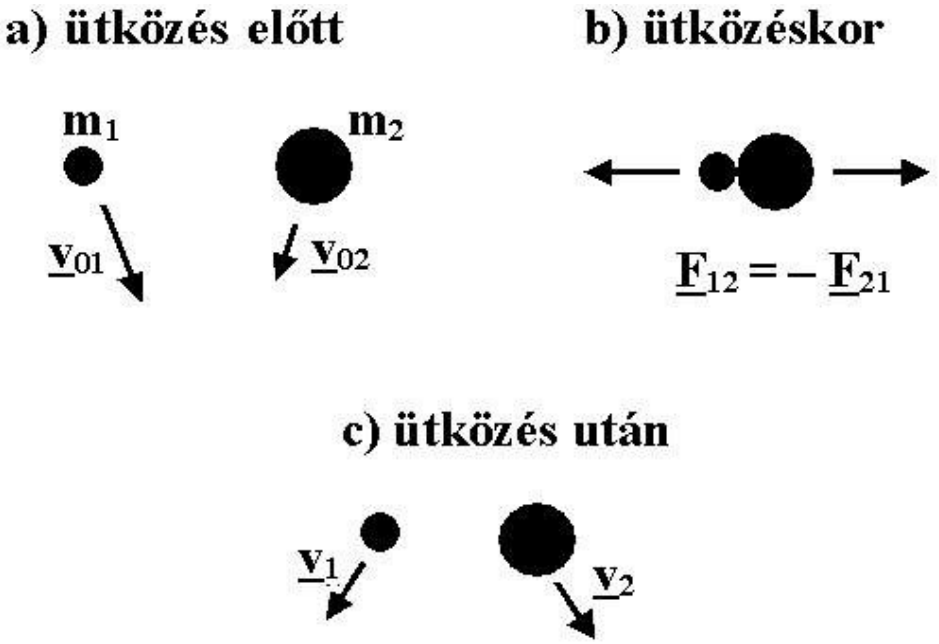
Kötött pontrendszerben a szabadság korlátozott: ahány feltételt ki kell elégíteni, annyival csökken a „szabadsági fokok” száma.



Súlyzó mozgása: n=2 tömegpont + rúd

3·n koordináta: 2·3 = 6
1 kötő feltétel (rúd hossza):
6 – 1 = 5 szabadsági fokú rendszer
(5 adattal írható le a helyzete)

- **Anyagi pontokból álló egyszerű rendszerek**



Írjuk fel az egyes pontokra ható erőlökést:
első anyagi pont:

$$\Delta t \cdot (\underline{F}_{1\text{külső}} + \underline{F}_{12}) = m_1 \cdot \underline{v}_1 - m_1 \cdot \underline{v}_{01}$$

második anyagi pont:

$$\Delta t \cdot (\underline{F}_{2\text{külső}} + \underline{F}_{21}) = m_2 \cdot \underline{v}_2 - m_2 \cdot \underline{v}_{02}$$

összeadva a két egyenletet:

$$\Delta t \cdot (\underline{F}_{1\text{külső}} + \underline{F}_{2\text{külső}} + \underline{F}_{12} + \underline{F}_{21}) =$$

$$= \underline{0} \quad \hookleftarrow$$

$$= \Delta t \cdot (\underline{F}_{1\text{külső}} + \underline{F}_{2\text{külső}}) =$$

$$= (m_1 \cdot \underline{v}_1 + m_2 \cdot \underline{v}_2) - (m_2 \cdot \underline{v}_{02} + m_1 \cdot \underline{v}_{01}) = \underline{p} - \underline{p}_0$$

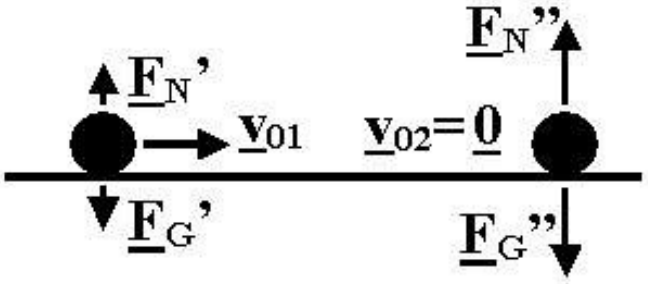
→ **Külső erők eredőjének erőlökése egyenlő a rendszer teljes lendületváltozásával ($\underline{p} - \underline{p}_0$).**

- **Zárt rendszer:**
  nem hatnak külső erők, vagy eredőjük 0.

→ Tehát megmutattuk, hogy zárt rendszer teljes lendülete megmarad (lendületmegmaradás).

Példák a lendületmegmaradásra:

– ütköző biliárdgolyók:



$$\underline{F}_N = -\underline{F}_G$$

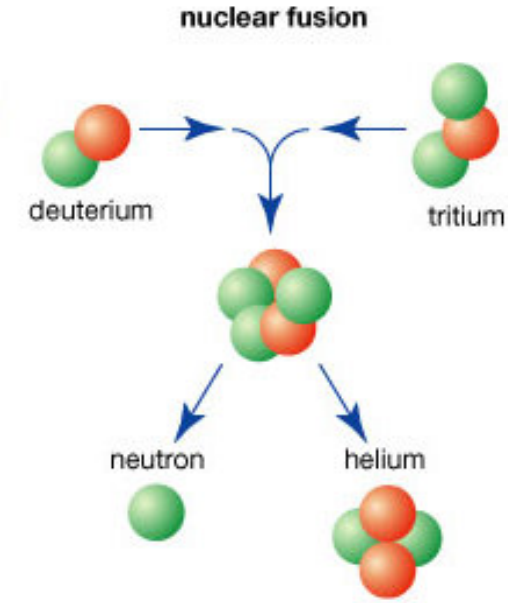
– összekötött vasúti vagonok,

– egymást ellökő korcsolyázók,

– felrobbanó nukleáris rendszerek, pl.:

a) $^3H + ^2H \rightarrow ^4He + n + 17600000\ eV$

A mozgási energia ilyenkor úgy oszlik meg (a He és a n között), hogy a lendületük egyenlő nagyságú (és ellentétes irányú) legyen →



b) Béta-bomlás:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

Zárt rendszerben a teljes mozgási energia *megváltozhat,* úgy, hogy a teljes lendület változatlan marad! → a belső erők végezhetnek munkát (a fenti példákban is!).

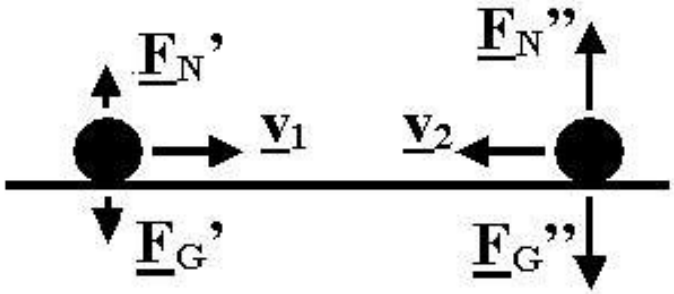
Feladatmegoldási lépések:

- **Mi tartozik a rendszerhez? (Sokszor nem könnyű eldönteni!)**
- **Melyek a külső és a belső erők?**
- **Zárt a rendszer, ha a külső erők eredője 0. Ha nem, próbáljunk másik rendszert választani, ahol igen!**
- **Zárt rendszerben a kezdeti és végállapoti lendület(vektor!) egyenlő. Ez természetesen igaz a lendületvektor komponenseire is!**

James Garry, Fastlight Used

Tömegpontok rugalmas, centrális ütközése

A <u>rugalmas</u> ütközés azt jelenti, hogy a <u>mozgási energia</u> is megmarad az ütközésben.



$\underline{F}_N = -\underline{F}_G$

Az 1. test v_{01} sebességgel a 2. álló testnek ütközik. Mekkora lesz a testek ütközés utáni v_1 és v_2 sebessége?

A lendület és energiamegmaradás:

(I) $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_{01} + 0$

(II) $m_1 \cdot v_1^2/2 + m_2 \cdot v_2^2/2 = m_1 \cdot v_{01}^2/2 + 0$

A (II) egyenletet átrendezve:

$m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot (v_{01}^2 - v_1^2) \equiv m_1 \cdot (v_{01} - v_1) \cdot (v_{01} + v_1)$

Az (I) egyenletet átrendezve:

$$m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot (v_{01} - v_1).$$

Ezt (II)-be írva:

$$v_2 = v_{01} + v_1 \text{ , azaz: } v_1 - v_2 = -v_{01}$$

Tehát a két test relatív sebessége ütközéskor egyszerűen előjelet vált!!! **Másrészt (I)-ből:**

$$v_2 = m_1/m_2 \cdot (v_{01} - v_1)$$

Ebből a végeredmény:

$$v_1 = [(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)] \cdot v_{01}$$

$$v_2 = [2 \cdot m_1/(m_1 + m_2)] \cdot v_{01}$$

Földre ejtett rugalmas golyó:

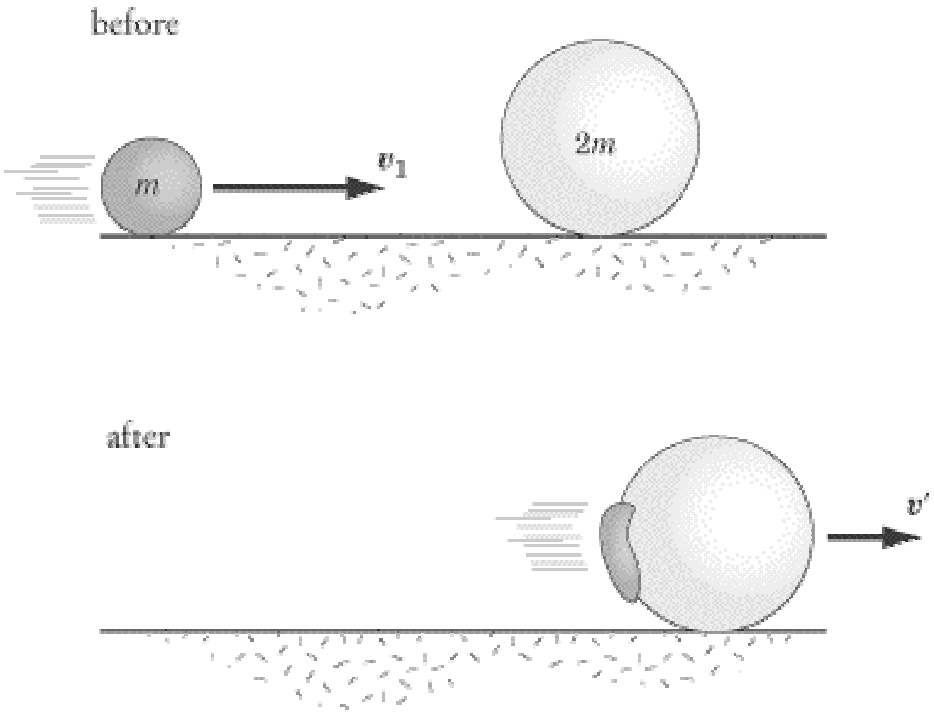
$m_1 << m_2 \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg

Emiatt ezt kapjuk: $v_2 \approx 0$ és $v_1 = -v_{01}$

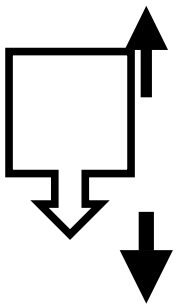
Rugalmatlan ütközés: $\Delta \underline{p} = \underline{0}$, tehát az impulzus megmarad, de a mozgási energia *nem marad meg*, változik.

Ekkor további feltétel kell, hogy az egyenletrendszert meg tudjuk oldani - pl. tökéletesen rugalmatlan ütközésnél a két tömegpont összetapadva mozog tovább: $v_1 = v_2$.

(Házi feladat ennek az esetnek a végigszámolása! Mennyivel csökken ez esetben a rendszer teljes mozgási energiája?)



Rakéta–meghajtás



v_0

$-\Delta m$ tömegű hajtóanyag ég el ($\Delta m<0$)

v_F a gáz *rakétához képesti* sebessége ($v_F>0$)

A gázra ható erő: F. Az erőlökés:

$F\cdot\Delta t = -(-\Delta m)\cdot v_F$

A tolóerő: $-F = (-\Delta m/\Delta t)\cdot v_F$

Az impulzusmegmaradást felírva:

$mv_0=(m+\Delta m)\cdot(v_0+\Delta v)+(-\Delta m)\cdot(v_0+\Delta v-v_F)$

Felbonvta a zárójeleket: $m\Delta v = -\Delta m\cdot v_F$

Ebből: $\Delta v = -v_F\cdot \Delta m/m$

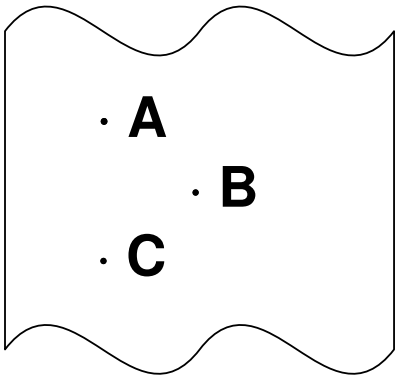
Ezt integrálva: $\boxed{v_1-v_0 = v_F\cdot\ln(m_0/m_1)}$

A rakéta és a hajtóanyag teljes lendülete nem változik: lehetőség a rakéta irányítására.

[$v_F \approx 10^4$ m/s]

4.2. Merev testek statikája

Merev test: az anyagi pontokból álló rendszerek speciális esete, ahol az egyes pontok közötti távolság nem változik.



Bármely kijelölt három pontja meghatározza a merev test helyzetét. Az AB, BC, CA távolságok nem változnak.

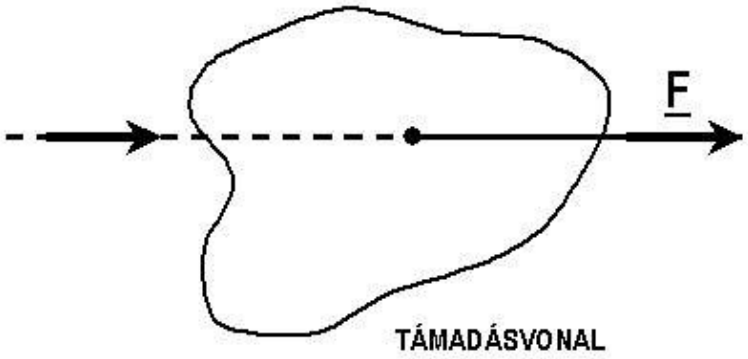
→ A merev test helyzetét 6 adat határozza meg, mert 3 pontjának 9 adata között 3 összefüggés van. A szabadsági fokok száma tehát 9 – 3 = 6.

A merev test mozgásának legáltalánosabb formái:

- haladó mozgás
- tengely körüli elfordulás

Minden mozgás felépíthető ezek kombinációjából!

A merev testre ható erő a *támadásvonal* mentén eltolható: → hatása ugyanaz

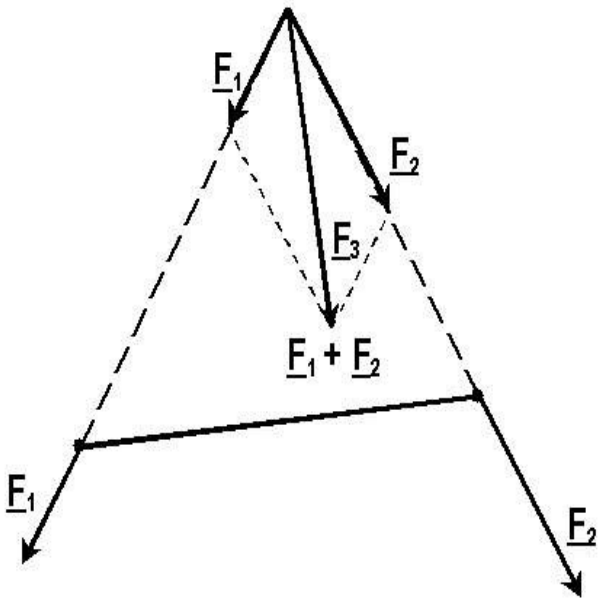


Erőrendszer *redukálása:* a merev testre ható erők helyettesítése egyetlen F eredő erővel, amelynek hatására a test ugyanúgy mozog, mint az eredetileg ható erők hatására.
(– F erővel hatva rá: nyugalomban marad)

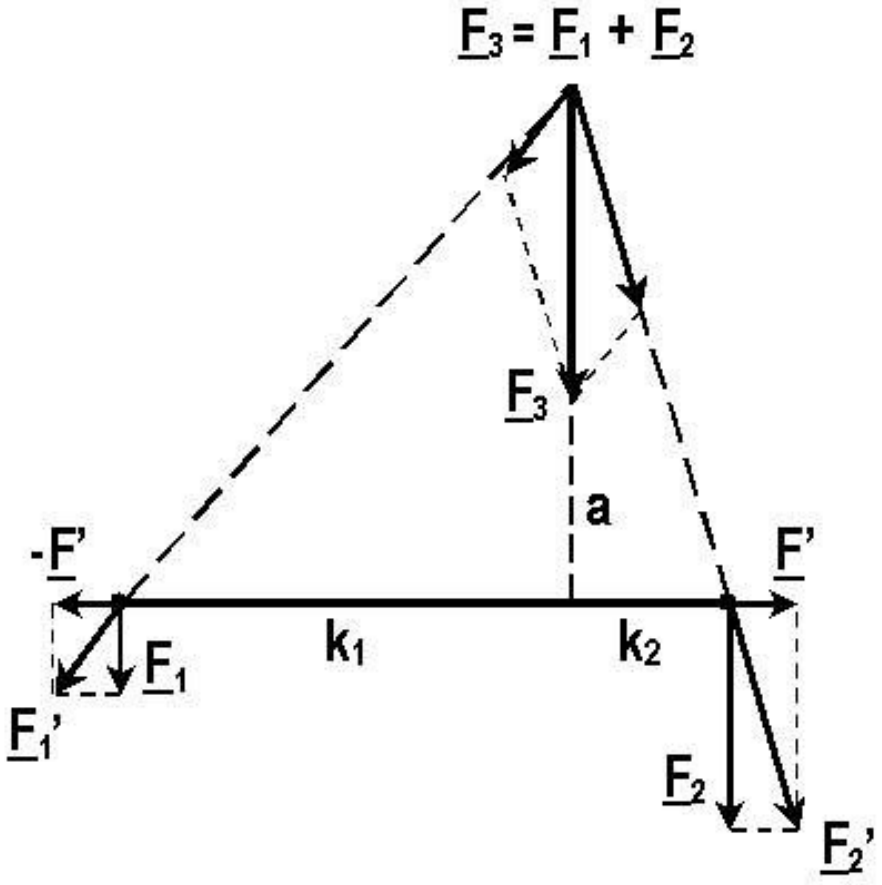
Két erő helyettesítése:

a) Ha a két erő egy síkban van, és nem párhuzamos:

Támadáspont: a *támadásvonalak metszéspontja* lesz.



b) Ha a két erő ($\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$) egy síkban van, párhuzamos, nem egyenlő:



Bevezetjük az F' és - F' segéderőket az ábra szerint. Az $\underline{F}_3$ eredő erő párhuzamos lesz $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$-vel. Hol a támadásvonala? Hasonló háromszögekből:

$a/k_1 = |\underline{F}_1| / |\underline{F}'|$; $a/k_2 = |\underline{F}_2| / |\underline{F}'|$

$\rightarrow a \cdot |\underline{F}'| = k_i \cdot |\underline{F}_i|$

$\rightarrow k_1 \cdot |\underline{F}_1| = k_2 \cdot |\underline{F}_2|$

Az $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erőket egyensúlyban tartó erő:

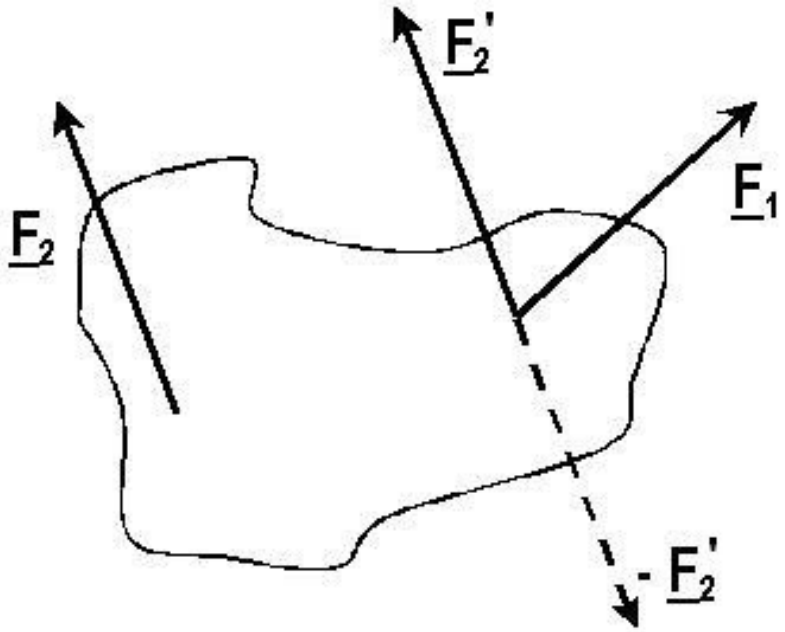
$\underline{F} = -\underline{F}_3$

a fent kiszámolt támadásvonalban hat.

c) Ha a két erő egy síkban van, párhuzamos, ellentétes irányú, egyenlő:

→ *nem* helyettesíthető egyetlen erővel
→ ez egy erőpár lesz!

d) Tetszőleges két kitérő irányú erő (figyelem, 3 dimenzióban vagyunk!)**:**



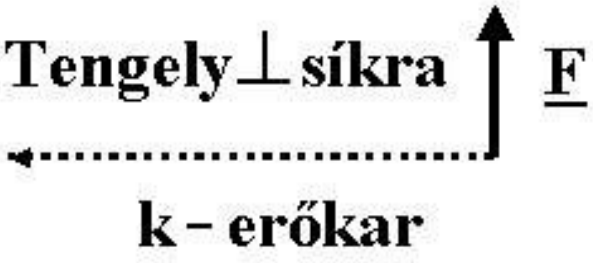
Az F_2' és $-F_2$' segéderők felvétele után F_1 és F_2' *összeadható*, F_2 és $-F_2$' *erőpárt* alkot.

Eredmény: bármely erőrendszer egy eredő erővel és egy erőpárral helyettesíthető.

A merev test egyensúlyban van, ha:
- **erők eredője 0** és
- **eredő erőpár is 0.**

4.3. Forgatónyomaték

A testre ható erő „forgatási képességét” jellemzi, ha a test egy tengely körül tud forogni.



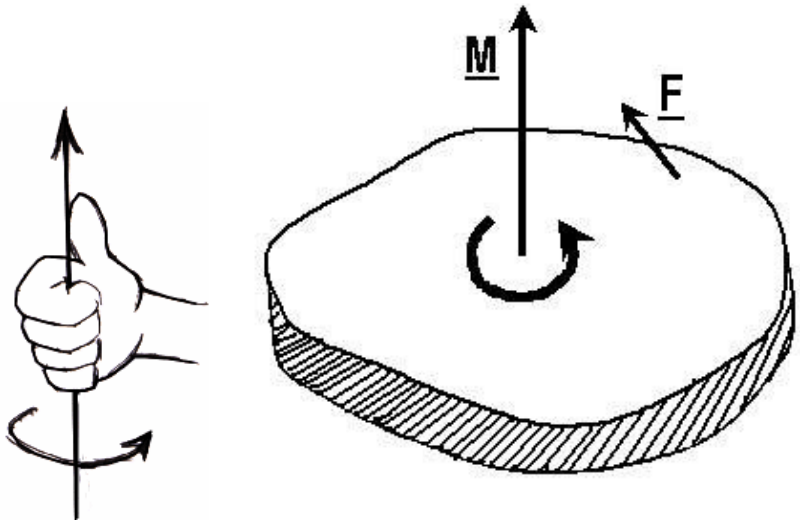
Ha az erő és az erőkar merőlegesek:

$|\underline{M}| = |\underline{F}| \cdot k$ **egysége: [N·m]**

k (az erő karja): F hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága

M: vektor, irányát a az erő „forgatási iránya” szabja meg

***Megállapodás*: jobbkéz-szabály szerint:**



A jobb kéz hüvelykujja néz a tengely irányába

Az erőpár forgatónyomatéka bármely, az ő síkjára merőleges tengelyre nézve: $k \cdot |\underline{F}|$

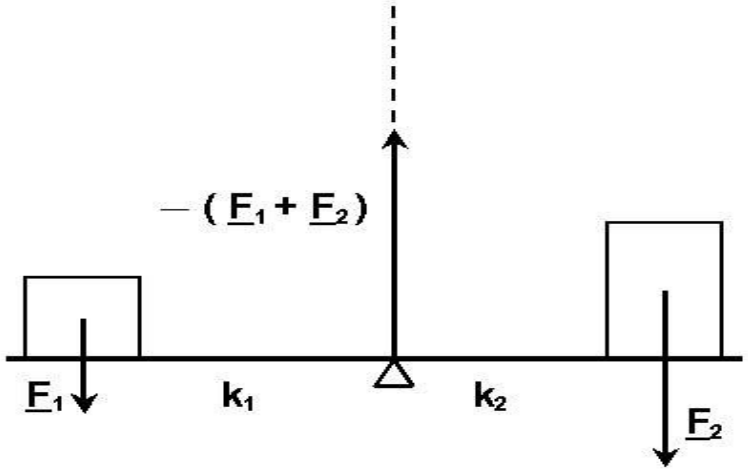
ahol k a támadásvonalak távolsága,

$|\underline{F}|$ az egyik erő nagysága.

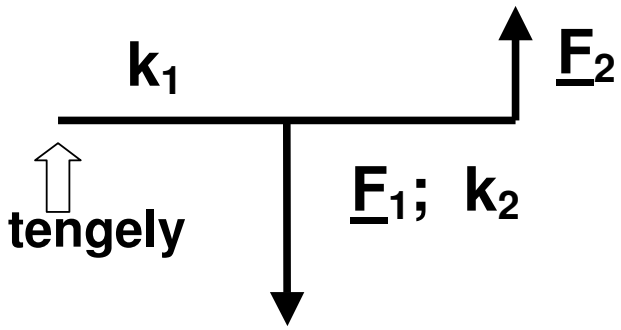
Tengely körül forgó merev test

Egyensúly feltétele: $\sum_i \underline{M}_i = \underline{0}$

a) **Mérleghinta**

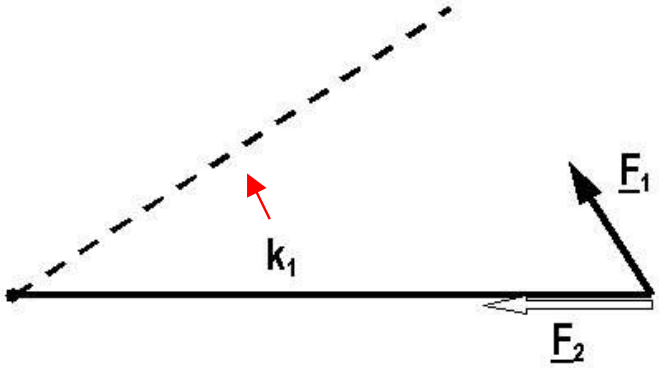


b) **Tengely körül forgó ajtó**



$$|\underline{F}_1| \cdot k_1 = |\underline{F}_2| \cdot k_2$$

c) **Tengely irányába mutató erő forgatónyomatéka 0**



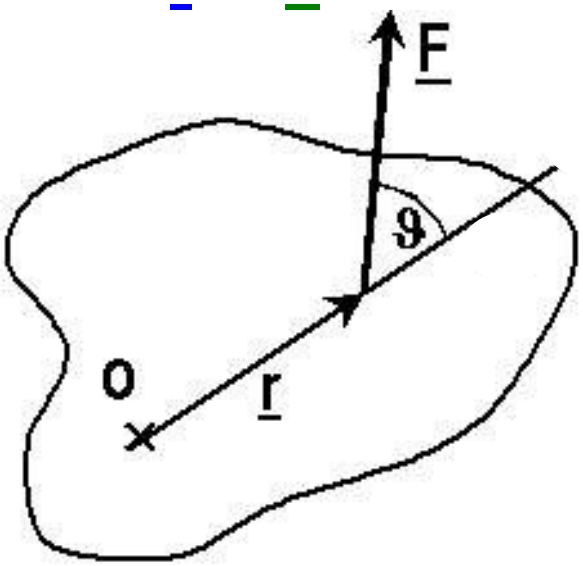
$$M_1 = k_1 \cdot |\underline{F}_1|$$

$$M_2 = 0$$

Általában: az erőt felbontjuk tengelyirányú és arra merőleges komponensekre.
$|\underline{M}|$ = erőkar · (merőleges erőkomponens)

Általános esetben:

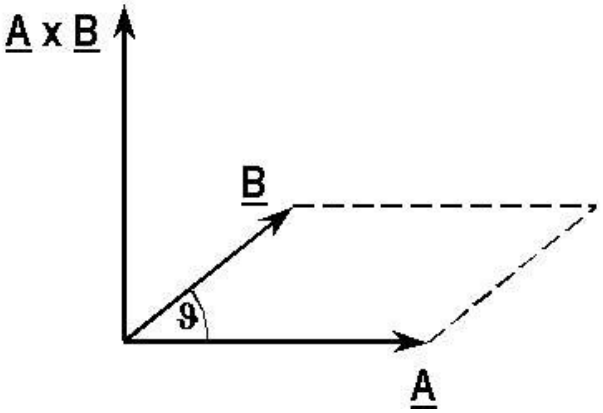
– A merev test az O pont körül foroghat, (ez legyen az origó)
– $\underline{r}$ helyvektorú pontban $\underline{F}$ erő forgat:
$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$ → $\underline{r}$ és $\underline{F}$ *vektorszorzata*

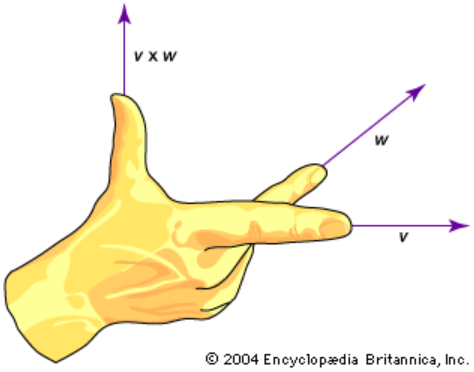


$\underline{M}$: – merőleges $\underline{r}$ és $\underline{F}$ síkjára,
– iránya: jobbkéz-szabály szerint
– nagysága: $|\underline{M}| = |\underline{r}| \cdot |\underline{F}| \cdot \sin\theta$
Az $\underline{M}$ forgatónyomaték: vektor,
tengely körüli gyorsuló forgást okoz.
Merev test egyensúlyban, ha $\underline{M} = \underline{0}$. Ekkor:
– transzlációs (haladó) gyorsulás = 0,
– szöggyorsulás = 0.

Vektorszorzat: $\underline{A}$ és $\underline{B}$ vektorszorzata:

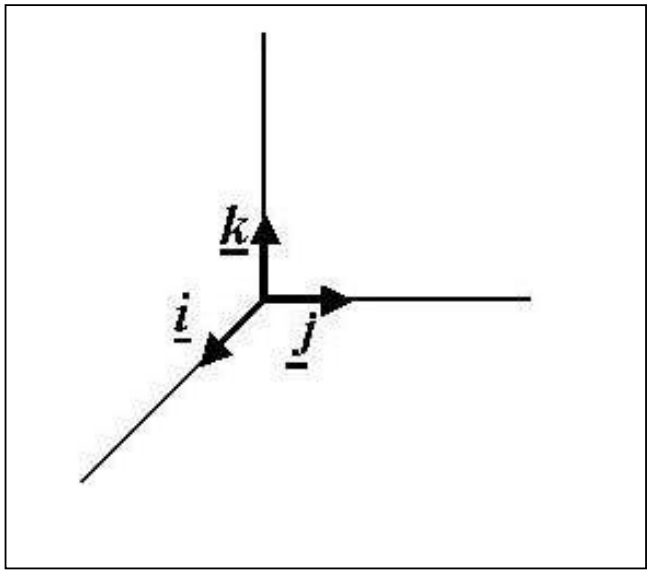
$$|\underline{A} \times \underline{B}| = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot \sin\theta$$





iránya: jobbkéz-szabály szerint: $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$x$\underline{B}$

- **nem kommutatív:** $\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A}$
- **Ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ párhuzamosak** $\rightarrow$ $\underline{A} \times \underline{B} = \underline{0}$
- **disztributív:** $\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} \times \underline{B}) + (\underline{A} \times \underline{C})$
- **NEM asszociatív:** $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) \neq (\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C}$
- **kapcsolat a skalárszorzattal:**
  $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$
- **$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ a merőleges koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok:**



$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$
$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$
$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0}$
$\underline{j} \times \underline{j} = \underline{0}$
$\underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

Vektorszorzat kiszámítása derékszögű koordinátarendszerben: könnyű szabály

$\underline{A} = A_1 \cdot \underline{i} + A_2 \cdot \underline{j} + A_3 \cdot \underline{k}$
$\underline{B} = B_1 \cdot \underline{i} + B_2 \cdot \underline{j} + B_3 \cdot \underline{k}$

$(\underline{A} \times \underline{B}) =$
$= [A_1 \cdot \underline{i} + A_2 \cdot \underline{j} + A_3 \cdot \underline{k}] \times [B_1 \cdot \underline{i} + B_2 \cdot \underline{j} + B_3 \cdot \underline{k}] =$
$[A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2]\ \underline{i} \times \underline{j} \quad + \quad [A_2 \cdot B_3 - B_2 \cdot A_3]\ \underline{j} \times \underline{k} +$
$= \underline{k}$ ↵ $= \underline{i}$ ↵
$+ [A_3 \cdot B_1 - B_3 \cdot A_1]\ \underline{k} \times \underline{i}$
$= \underline{j}$ ↵
innen kapjuk:

1. koord. ($\underline{i}$) → $(\underline{A} \times \underline{B})_1 = A_2 \cdot B_3 - B_2 \cdot A_3$
2. koord. ($\underline{j}$) → $(\underline{A} \times \underline{B})_2 = A_3 \cdot B_1 - B_3 \cdot A_1$
3. koord. ($\underline{k}$) → $(\underline{A} \times \underline{B})_3 = A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2$

Példa: forgatónyomaték vektor: $\underline{r} \times \underline{F}$

$\underline{r}$ (3m, 4m, 5m) és $\underline{F}$ (-2N, 1N, 7N)

$(\underline{r} \times \underline{F})_1 = 4 \cdot 7 - 1 \cdot 5$ Nm = 23 Nm
$(\underline{r} \times \underline{F})_2 = 5 \cdot (-2) - 7 \cdot 3$ Nm = -31 Nm
$(\underline{r} \times \underline{F})_3 = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4$ Nm = 11 Nm

→ $(\underline{r} \times \underline{F}) = (23, -31, 11)$ Nm

Feladatmegoldási lépések,
amikor egy test egyensúlyáról van szó:

- **Melyik test van egyensúlyban?**
- **Rajzoljuk le az összes külső erőt irány és hatásvonal szerint!**
- **Válasszunk x, y** (egymásra merőleges) **irányokat célszerűen, és bontsuk fel az erőket ebbe az irányokba!**
- **Egyensúly egyik feltétele:**

$$\sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0;\ \sum F_z = 0$$

- **Válasszunk célszerűen egy forgástengelyt és határozzuk meg a forgatónyomatékokat!**

$$\sum \underline{M}_i = \underline{0}$$

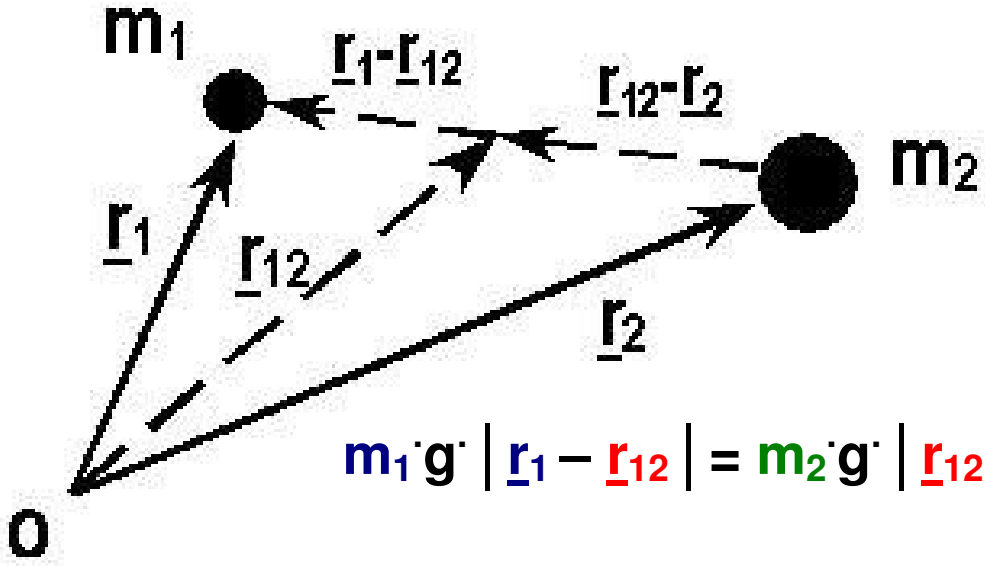
- **Oldjuk meg a**

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0;$$
$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0$$

egyenleteket!

4.4. A súlypont

- A **súlypont** az a pont, amelyben egy merev testet **alátámasztva** vagy felfüggesztve, az bármely helyzetében **egyensúlyban** van.
- Az a pont, amelyben a merev test **súlya hat**, és amelyre nézve a súlyerők eredő **forgatónyomatéka** a nulla.



$$m_1 \cdot g \cdot |\underline{r}_1 - \underline{r}_{12}| = m_2 \cdot g \cdot |\underline{r}_{12} - \underline{r}_2|$$

$$m_1 \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_{12}) = m_2 \cdot (\underline{r}_{12} - \underline{r}_2)$$

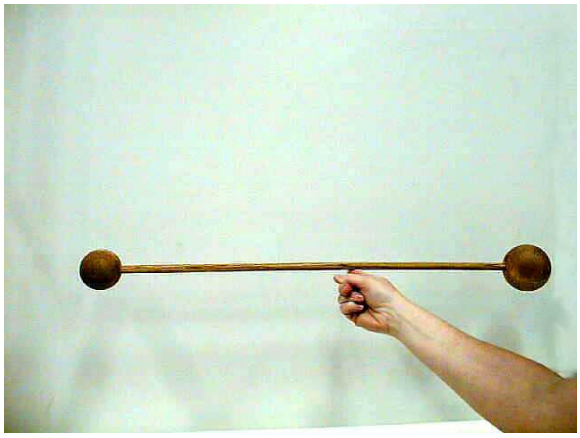
$$\rightarrow \quad \underline{r}_{12} = (m_1 \cdot \underline{r}_1 + m_2 \cdot \underline{r}_2)/(m_1 + m_2)$$

Általánosságban a súlypont helye tehát:

$$\underline{r}_S = (\sum_i m_i \cdot \underline{r}_i)/\sum m_i = (\sum_i m_i \cdot \underline{r}_i)/m$$

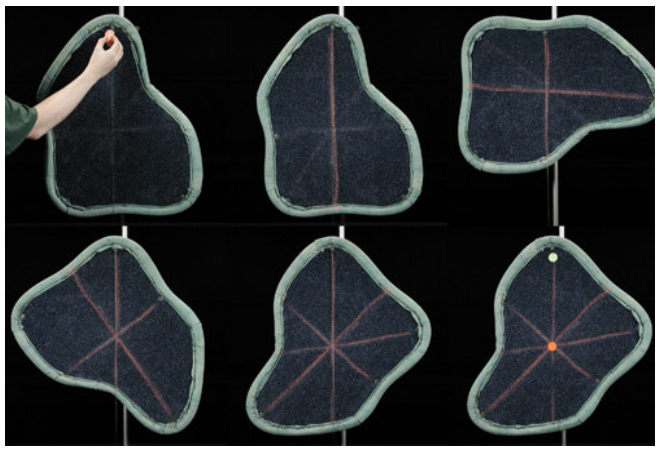
Derékszögű koordinátákkal:

$$x_S = (\sum m_i \cdot x_i)/m$$
$$y_S = (\sum m_i \cdot y_i)/m$$
$$z_S = (\sum m_i \cdot z_i)/m$$



Megjegyzések a súlypontról:

a) **Kísérleti meghatározása:**
két (vagy több) **tetszőleges pontban való felfüggesztéssel.**
A felfüggesztési pontokon áthaladó függőleges egyenesek metszéspontja.



b) **Testek súlypontja:**
– **szimmetrikus, homogén test esetén: a geometriai középpont**
– **szimmetrikus inhomogén testnél: nem a geometriai középpont**
– **lehet a testen kívül is!**

c) **Súlypont: az $m \cdot g$ súlyerő támadáspontja**
Ha a súlypont magassága Δh–val változik:
→ a végzett munka = $m \cdot g \cdot \Delta h$

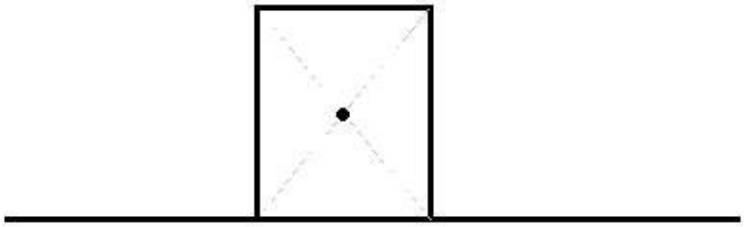
d) **Szabad merev testre ható erőpár a testet a súlyponton átmenő tengely körül forgatja el.**

Merev testek egyensúlya:

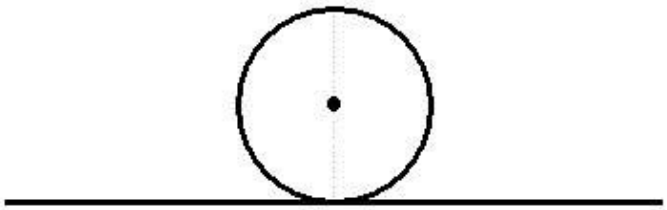
$$\sum \underline{F}_i = \underline{0}; \quad \sum \underline{M}_i = \underline{0}$$

Egyensúly alátámasztott testeknél:

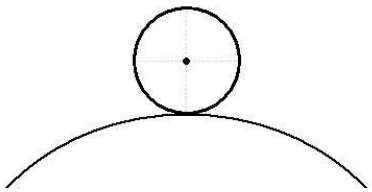
– **Biztos (stabil), ha a súlypontja mélyebben van, mint a szomszédos lehetséges helyzetekben, pl.:**



– **Közömbös, pl.:**



– **Bizonytalan (instabil), pl.:**



Állásszilárdság mértéke: a közömbös vagy instabil állapot eléréséhez szükséges $m \cdot g \cdot \Delta h$ munka.

4.5. Egyszerű gépek: erőátviteli eszközök

Lényeg:

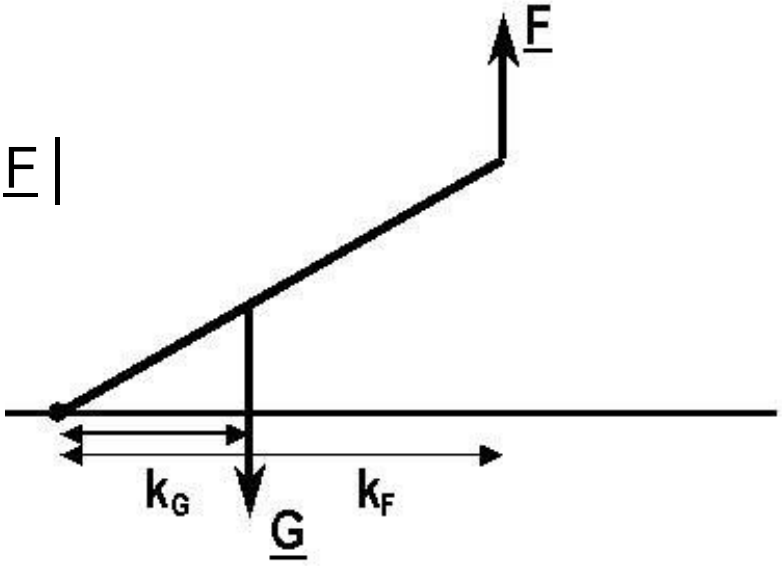
– egy **nagyobb** erőt **kisebb** erővel egyensúlyozunk,

– a végzett mechanikai **munka** mindig **ugyanaz**

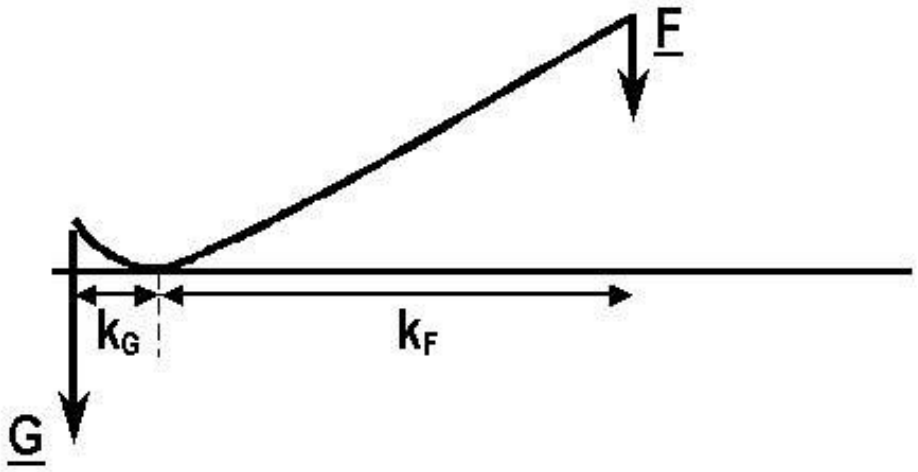
a) Emelő típusú

- **Egykarú emelő**

$$k_G \cdot |\underline{G}| = k_F \cdot |\underline{F}|$$

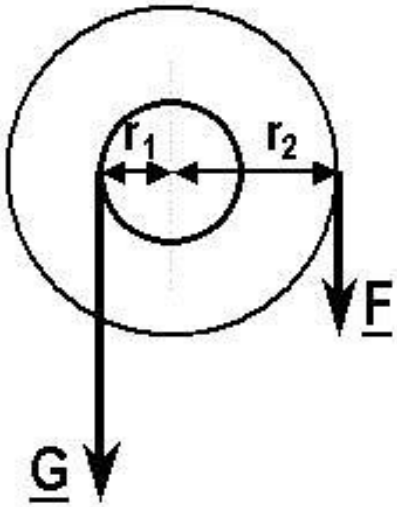


- **Kétkarú emelő**



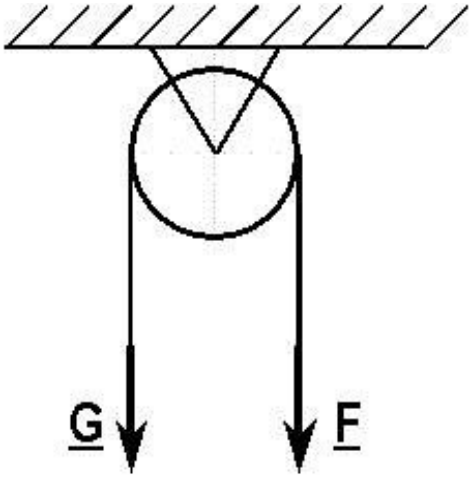
b) Hengerkerék (pl. kerekes kút)

$$|\underline{G}| \cdot r_1 = |\underline{F}| \cdot r_2$$

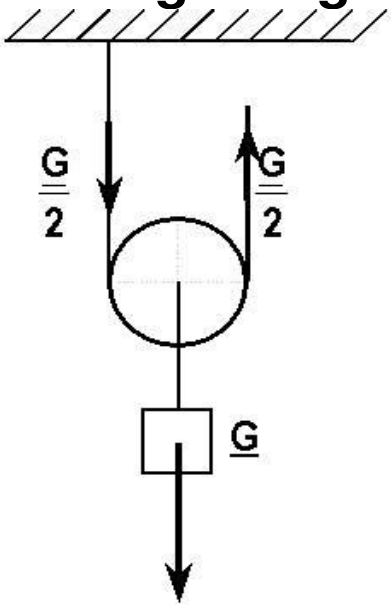


c) Csiga

Álló csiga

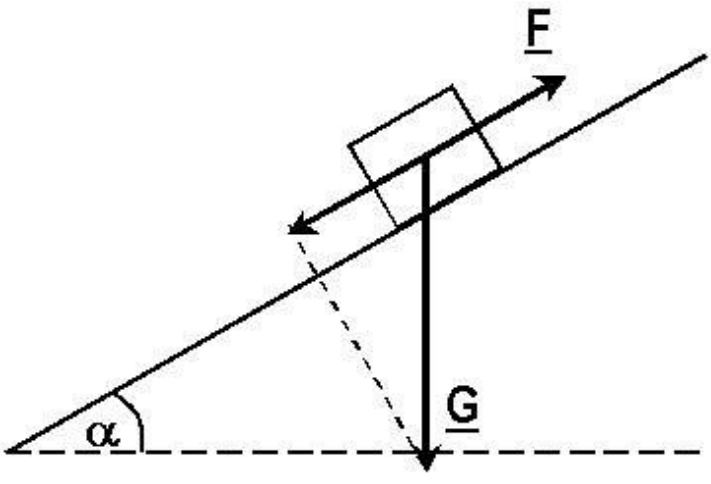


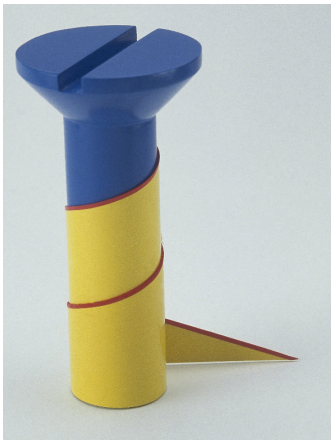
Mozgó csiga



d) Lejtő

$$|\underline{F}| = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$



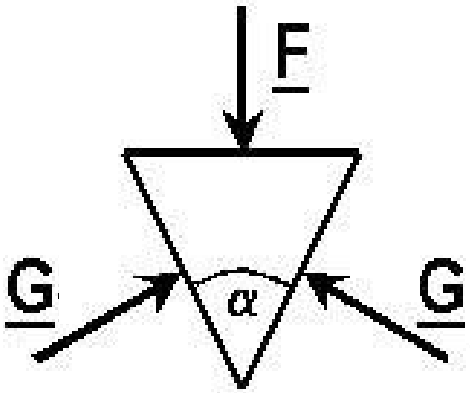


e) Csavar: „feltekert lejtő”

$F = G \cdot h/(2 \cdot \pi \cdot r)$

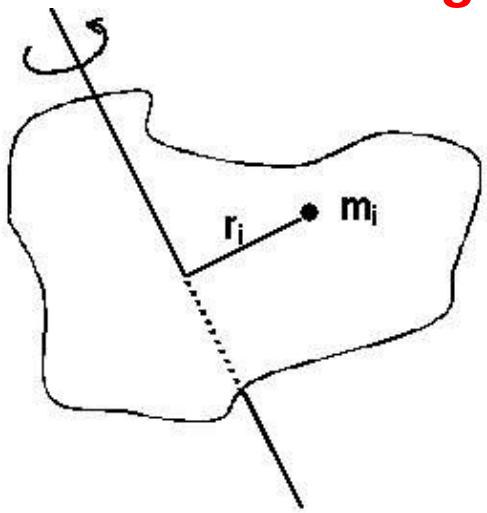
ahol **h** a menetemelkedés

f) Ék:



$|\underline{F}| \approx |\underline{G}| \cdot \sin \alpha$

4.6. Merev test tengely körüli forgása



ω: szögsebesség

az adott tömegpont sebessége:

$v_i = r_i \cdot \omega$

Számítsuk ki a teljes mozgási energiát:

$E_{mozgási} = \sum_i (1/2) \cdot m_i \cdot v_i^2 =$

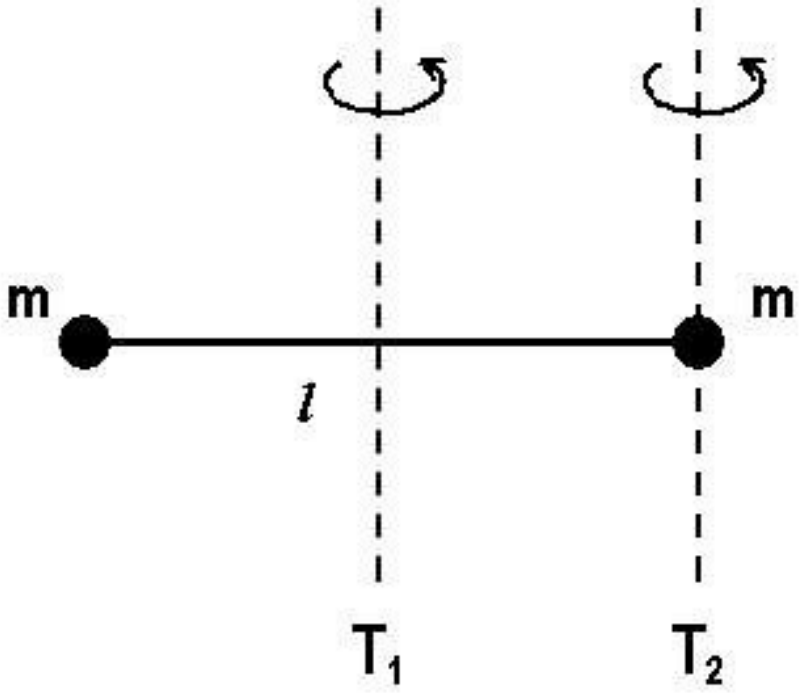
$= (1/2) \cdot \omega^2 \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 = (1/2) \cdot \omega^2 \cdot \Theta$

$\Theta = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \rightarrow$ **Tehetetlenségi nyomaték**

SI egysége: $[kg \cdot m^2]$

Θ értéke a testre és a forgástengelyre együttesen jellemző.

Példa:
súlyzó: két *m* tömegű pont egy nagyon könnyű, *l* hosszúságú rúd két végén



A T_1 tengelyre nézve:

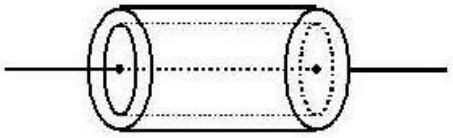
$$\Theta_1 = 2 \cdot (m \cdot [l/2]^2) = m \cdot l^2/2$$

A T_2 tengelyre nézve:

$$\Theta_2 = m \cdot l^2$$

Θ értéke néhány test és tengely esetére:

- **Üres henger**, szimmetriatengely körül

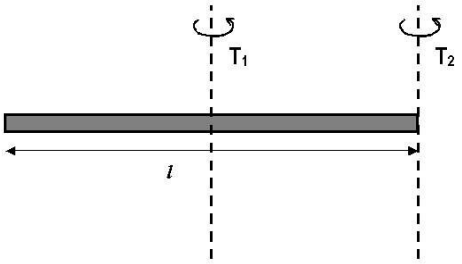


$\Theta = m \cdot r^2$

- **Tömör henger**, szimmetriatengely körül

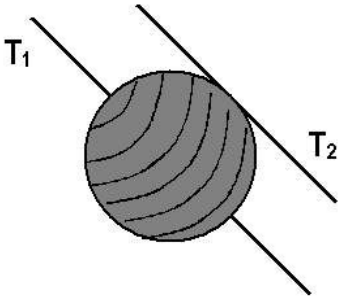
$\Theta = m \cdot r^2/2$

- **Rúd**, közepén és végén átmenő tengely



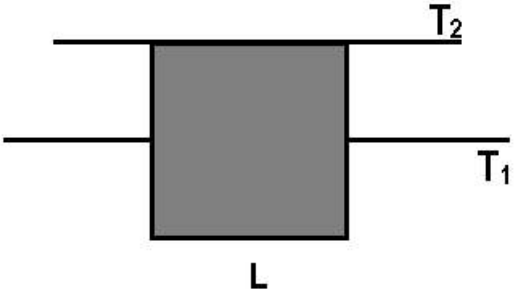
$T_1 \rightarrow \Theta = m \cdot l^2/12$
$T_2 \rightarrow \Theta = m \cdot l^2/3$

- **Tömör gömb** a szimmetriatengely és az érintő körül



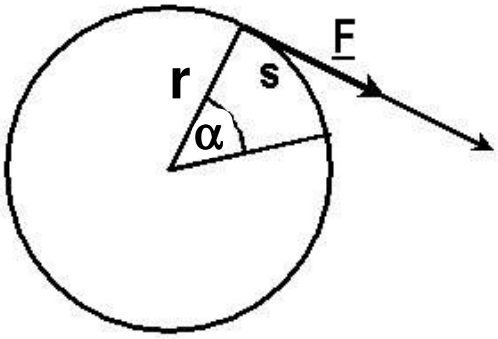
$T_1 \rightarrow \Theta = 2/5 \cdot m \cdot r^2$
$T_2 \rightarrow \Theta = 7/5 \cdot m \cdot r^2$

- **Gömbhéj** szimm.teng. körül $\Theta = 2/3 \cdot m \cdot r^2$
- **Négyszögletes lap**



$T_1 \rightarrow \Theta = 1/12 \cdot m \cdot L^2$
$T_2 \rightarrow \Theta = 1/3 \cdot m \cdot L^2$

4.7. A forgatónyomaték munkája



$s = \alpha \cdot r$

$W = F \cdot s = F \cdot r \cdot \alpha = M \cdot \alpha$

(α az elfordulás szöge)

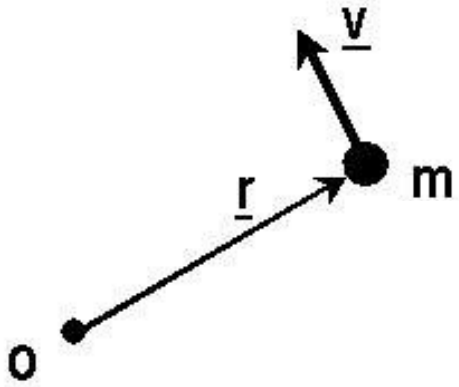
4.8. A perdület

$\underline{P} = \Theta \cdot \underline{\omega}$ SI egysége: [$kg \cdot m^2/s$]

$\underline{P}$ állandó, ha nincsen forgatónyomaték

Perdületmegmaradás: ha az eredő külső forgatónyomaték nulla, akkor a test perdülete nem változik

Általánosságban: a perdület a helyvektor és a lendület vektoriális szorzata:



$\underline{P} = \underline{r} \times (m \cdot \underline{v}) = \underline{r} \times \underline{p}$

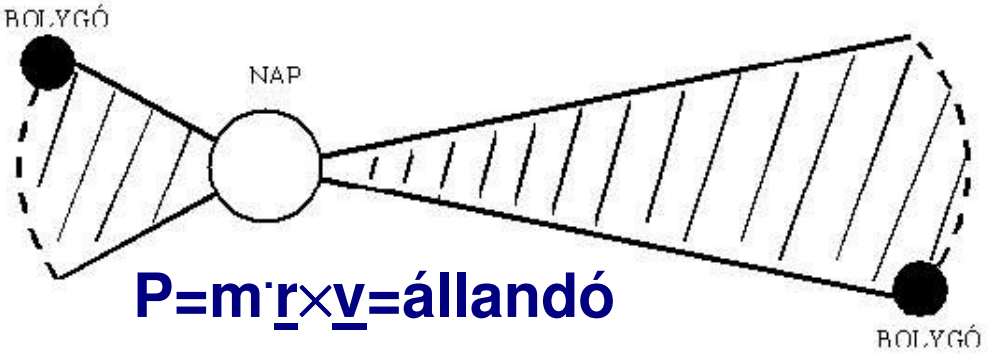
A $\underline{P}$ perdület pontrendszer esetén: $\underline{P} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{p}_i$

→ a perdületmegmaradás itt is igaz.

Példák:

- **piruettező korcsolyázó,**
- **repülő helikopter,**
- **bolygó a Nap körül**

A gravitációs erőtér *centrális*
→ nincs forgatónyomaték



$$P = m \cdot \underline{r} \times \underline{v} = \text{állandó}$$

Kepler második törvénye: annak a következménye, hogy az erőtér centrális!

- **Forgózsámoly kísérletek:**

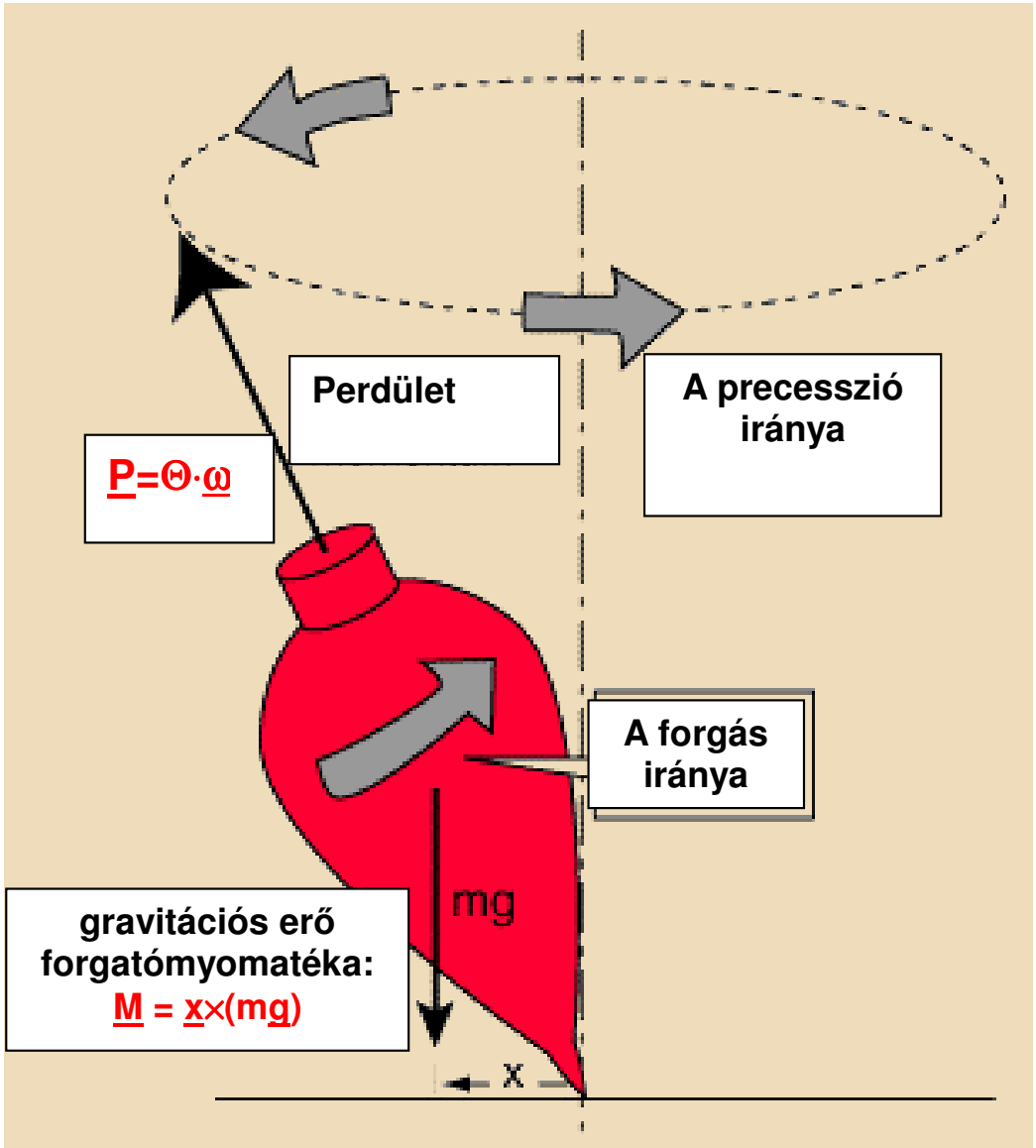
4.9. Precesszió. A Föld mozgásai.

A $\underline{P}$ perdület megváltozásának üteme a testre ható forgatónyomatékkal egyenlő:

$$\underline{M} = \Delta\underline{P}/\Delta t \text{ (vektorok!)}$$

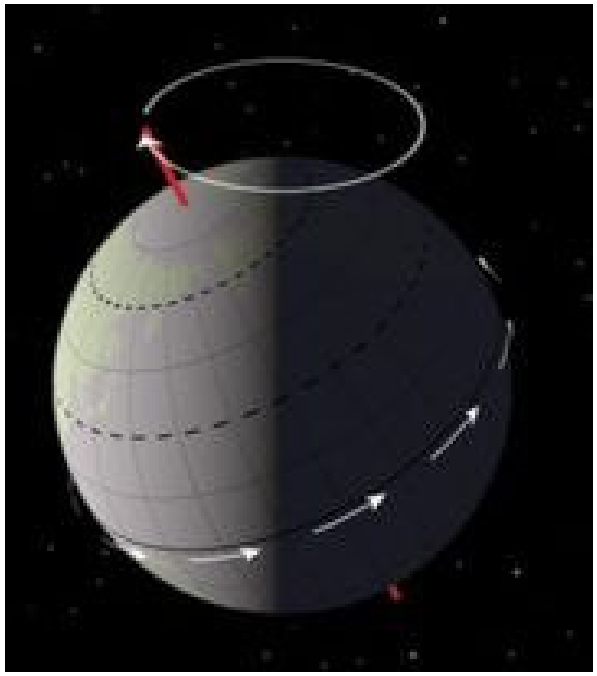
Súlyos pörgettyű:

az $m\underline{g}$ súlyerő függőleges → $\underline{M}$ vízszintes.
$\underline{P}$ a forgástengely irányába mutat,
$\underline{P}$ megváltozása vízszintes irányú.
→ Precesszió:

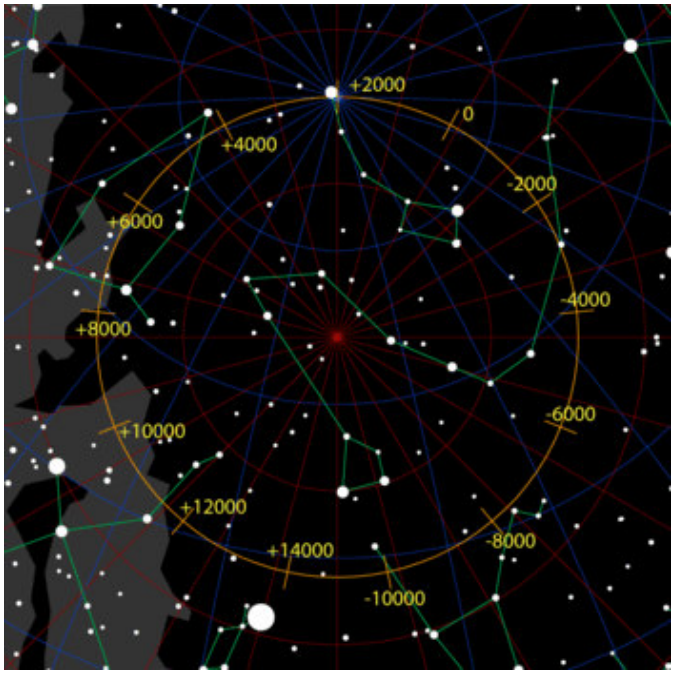


A Föld forgástengelyének precessziója:

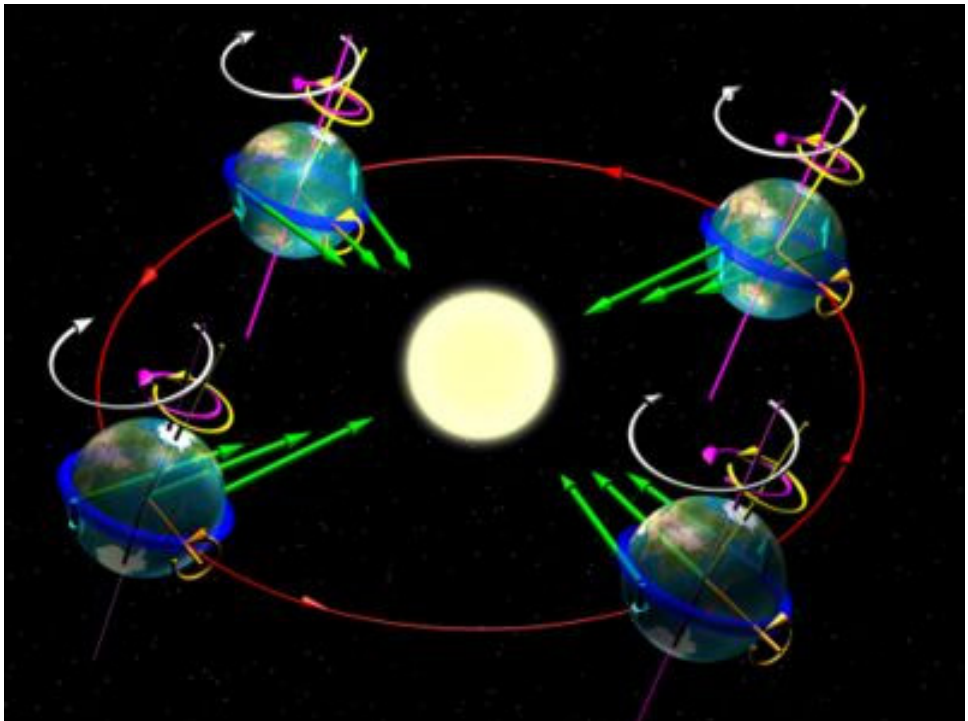
A precesszió:



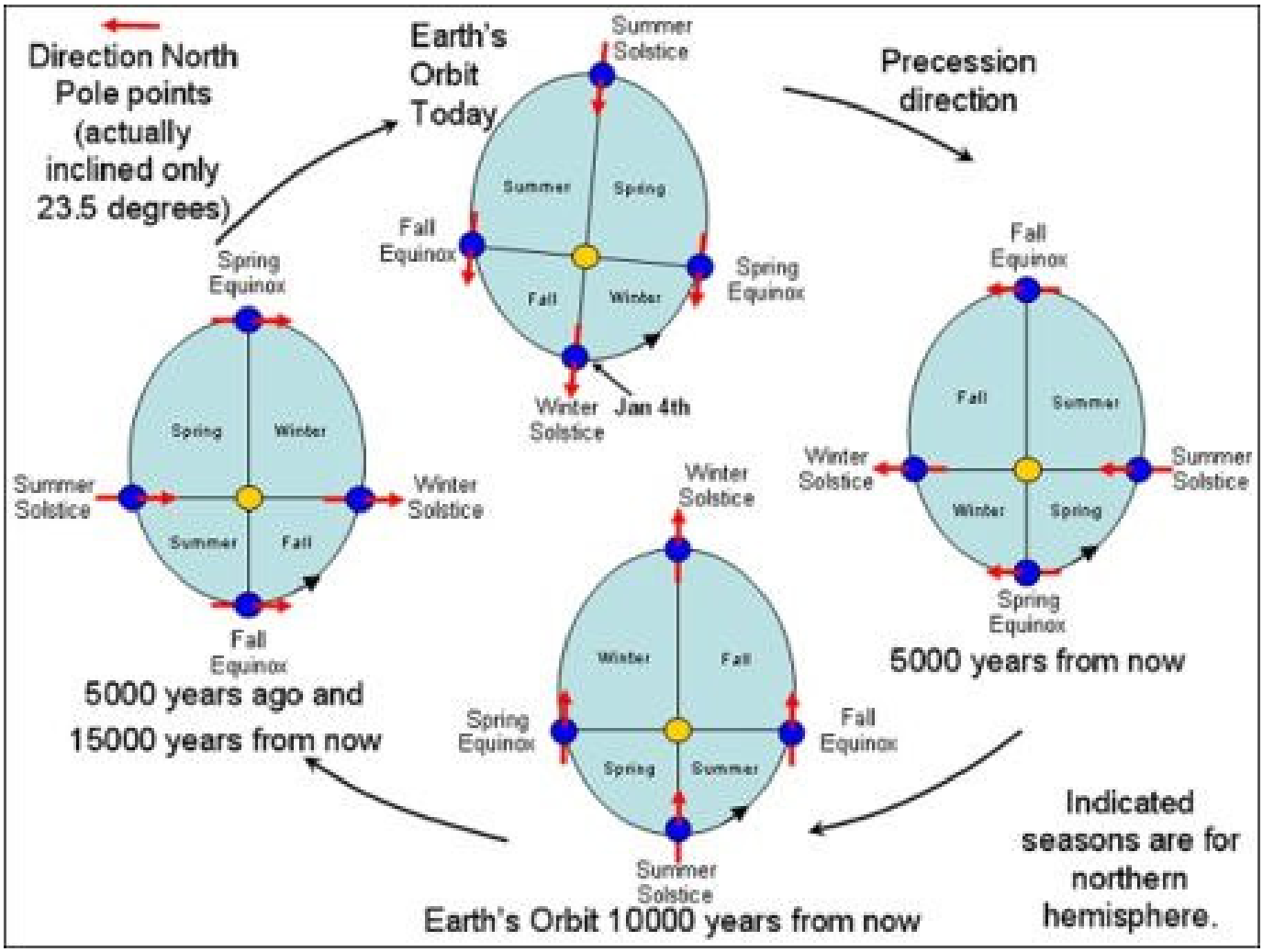
Az északi pólus a vándorlása az égen:



A forgástengely dőlésszöge 23,5 fok a keringés pályasíkjához képest. A tengely iránya kb. 25700 év alatt körbefordul! Ennek az oka a Nap (és a Hold) vonzása, és a Föld lapult alakja:



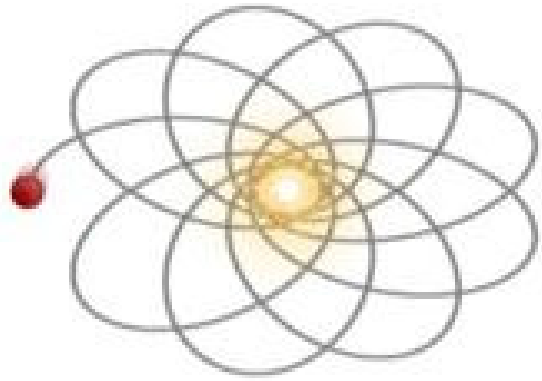
Mindez az ellipszispálya lapultsága miatt a nyár és a tél hosszának változásával jár (Kepler 2. törvénye miatt):



Most az északi féltekén nyáron vagyunk naptávolban (hosszú nyár, rövid tél), de kb. 10000 év múlva nyáron leszünk napközelben → melegebb nyár, hidegebb tél.

Az északi és déli félteke változásai nem kompenzálják egymást (eltérő tenger-szárazföld arány).

Néhány további mozgási periódus a Földnél:
a.) földpálya-precesszió (eltúlzott rajz!):



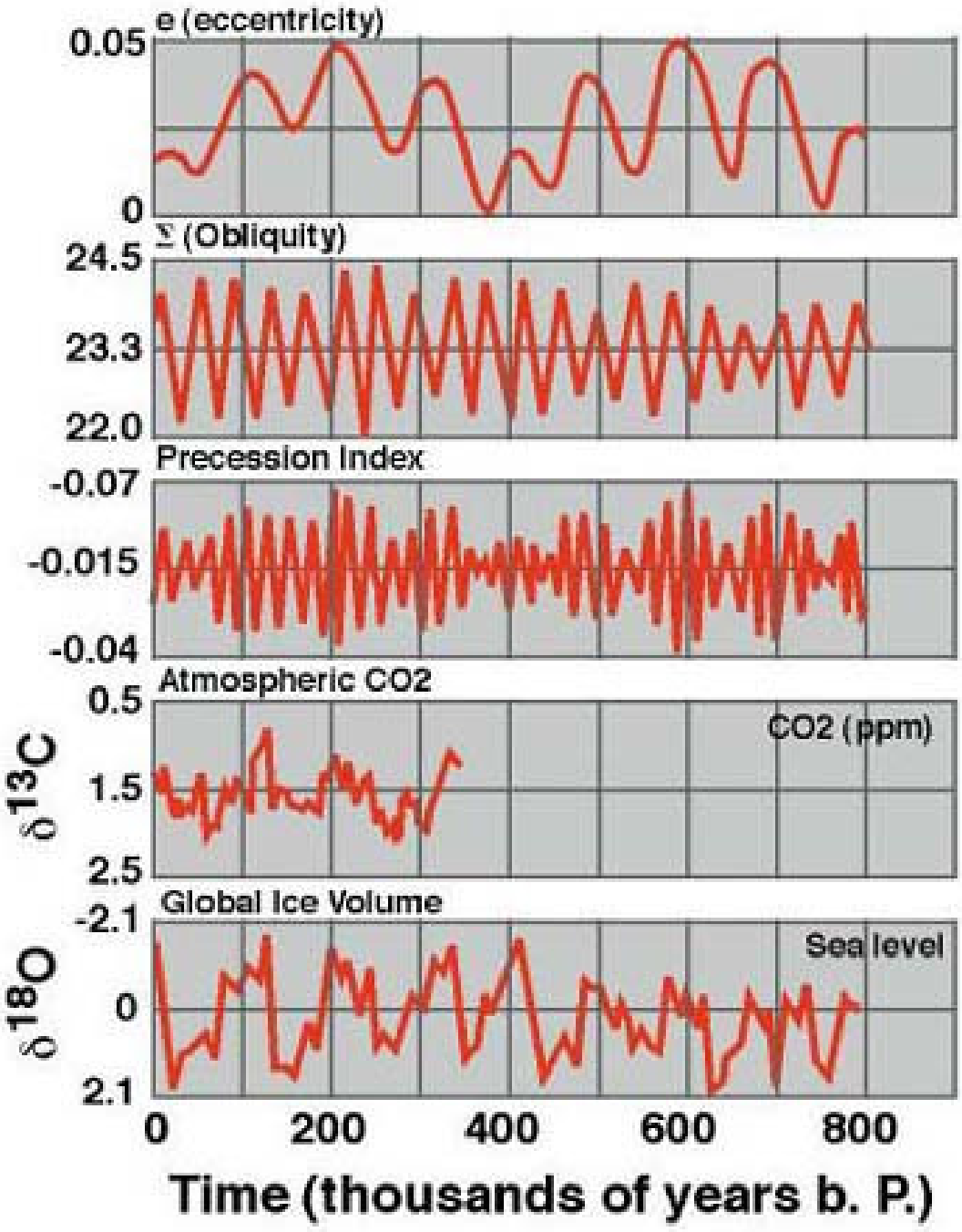
Ennek oka a többi bolygó vonzásának hatása (+ általános relativitáselmélet).
Periódus: 112 ezer év.

b.) A pálya excentricitása is változik 0 és 5% között. Periódus: 100 ezer év.

c.) A Föld forgástengelyének dőlésszöge is változik, 22,5 és 24 fok között (nutáció). Periódus: 41 ezer év. Kis szögeknél: jégkorszak. Jelenleg: 23,5 fok, és csökken.

d.) A forgás lassulása (ár-apály): a nap hossza 100 évente 0,02 másodperccel nő. A Hold évente 4,5 cm-rel távolodik a Földtől.

→ **Éghajlatváltozások (jégkorszak) periódusában felfedezhetők a Föld mozgásának periódusai (komplikált rendszer).**



4.10. Haladó és forgó mozgások áttekintése

$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$	$\underline{M} = \Theta \cdot \underline{\beta}$
$E = (1/2) \cdot m \cdot v^2$	$E = (1/2) \cdot \Theta \cdot \omega^2$
$v(t) = v_0 + a \cdot t$	$\omega(t) = \omega_0 + \beta \cdot t$
$\underline{p} = m \cdot \underline{v}$	$\underline{P} = \Theta \cdot \underline{\omega}$
$s(t) = v_0 \cdot t + a \cdot t^2/2$	$\omega(t) = \omega_0 \cdot t + \beta \cdot t^2/2$

Az összefüggések között hasonlóság figyelhető meg.

Megmaradási tételek zárt rendszerek esetén:

- **A rendszer teljes lendülete megmarad**
- **A rendszer teljes perdülete megmarad**

A mechanikai energia nem mindig marad meg: a belső erők munkát végezhetnek.

5. A FOLYADÉKOK MECHANIKÁJA

A folyadékok anyagi pontokból álló rendszerek. Alakjuk változhat, folyhatnak.

Korpuszkuláris (részecske-) szemléletben: a részecskék közötti erők megengedik az egymáshoz képesti elmozdulást.
→ Folyadékok és gázok is ide tartoznak.

Lehetnek: homogén, inhomogén közegek.
Mechanikájuk: a) statika, b) dinamika.

5.1. A sűrűség

Térfogategységenkénti tömeg:

$$\rho = m/V \rightarrow \text{SI egysége: } [kg/m^3]$$

Példák (kg/m^3 egységben):

Szilárd		Folyadék		Gáz	
Al	2700	víz(4°C)	1000	levegő	1.2
beton	2200	vér(37°)	1060	CO_2	1,96
réz	8890	etil-alkohol	806	H_2	0,089
gyémánt	3520	Hg	13600	N_2	1,25
Au	19300	olaj	800	O_2	1,43
jég	917	[0°C, 1 atm.]		[0°C,1 atm.]	
Fe	7860				
Pb	11300				

A sűrűség más egységei:
[kg/dm^3], [kg/l] (1 dm^3 = 1 liter)
(Régi egység: fajsúly: egységnyi térfogat súlya → $\rho \cdot g$ [N/m^3]. Ma már nem használjuk.)

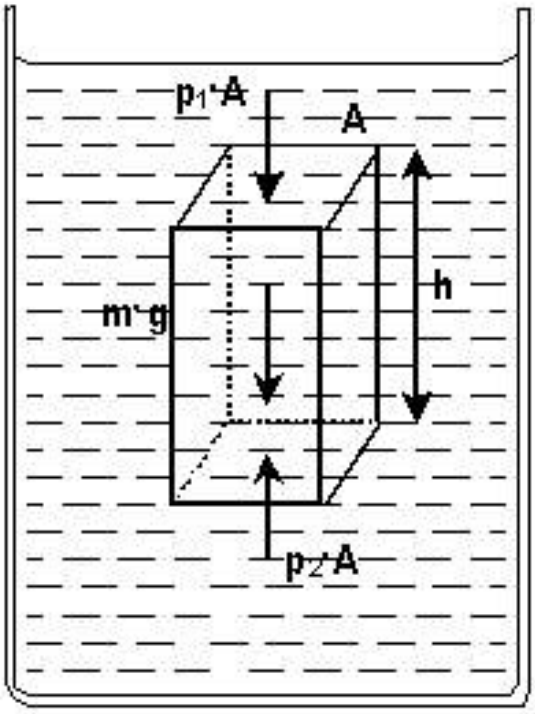
5.2. Nyomás

$p = |\underline{F}|/A$, ha $\underline{F}$ erő hat az A felületre.
Skalár mennyiség.
SI egysége: 1 N/m^2 = 1 Pa (Pascal);
10^5 Pa ≡ 1 bar
A levegő átlagos nyomása tengerszinten:
1 atm (atmoszféra) = 1,013 bar = 1013 hPa

- **Álló folyadéknál a nyomásból származó nyomóerő mindig merőleges a felületre.**
  Nem merőleges (nyíró-) erők a folyadék mozgását okoznák.

Példák:
– kőtömb-hasítás légzsákkal,
– síléc, hótalp, hóban járó hiúz talpa:
nagy felületre van szükség

- **Nyomás folyadékban**



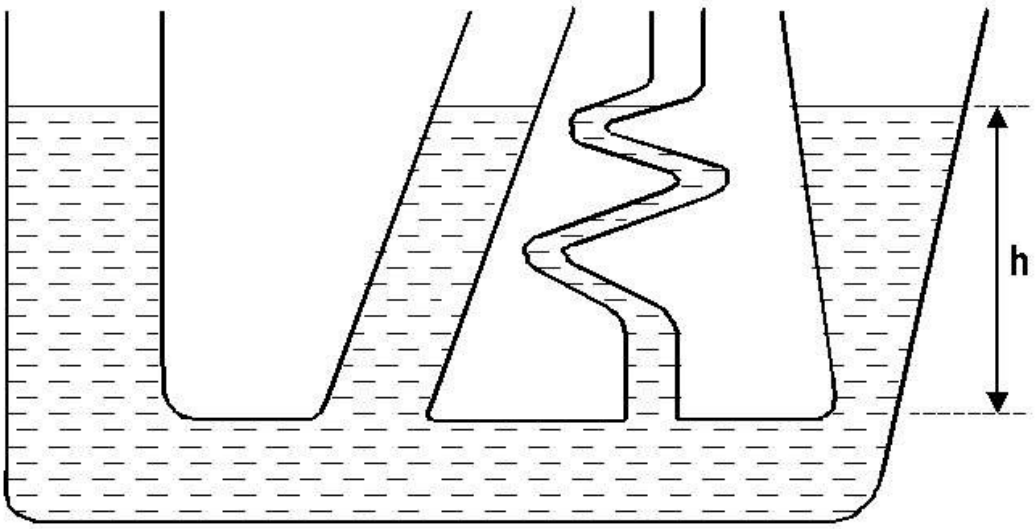
Folyadéktömb tömege:
$m = \rho \cdot h \cdot A$, ha ρ=állandó.

Ha a folyadék nyugalomban van:

$$p_2 \cdot A = p_1 \cdot A + m \cdot g = p_1 \cdot A + \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

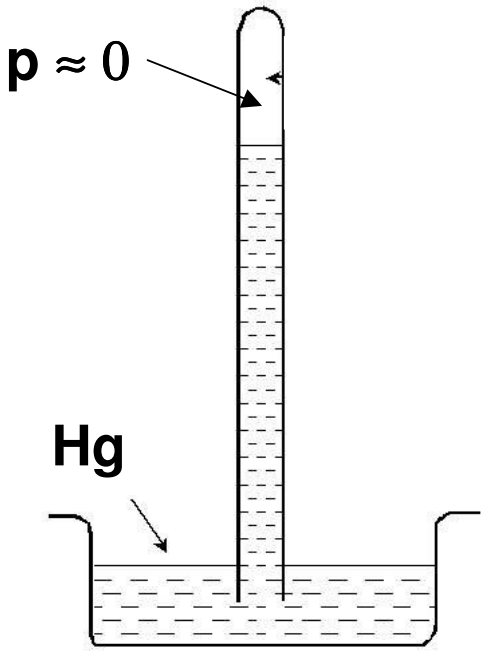
Ebből: $p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot h$

Ez a hidrosztatikai nyomás. Csak a magasságkülönbségtől és a folyadék sűrűségétől függ.



Közlekedőedények: minden ágban ugyanolyan magas a folyadék → *p* ugyanaz

Torricelli-cső [Evangelista TORRICELLI,1608-47]

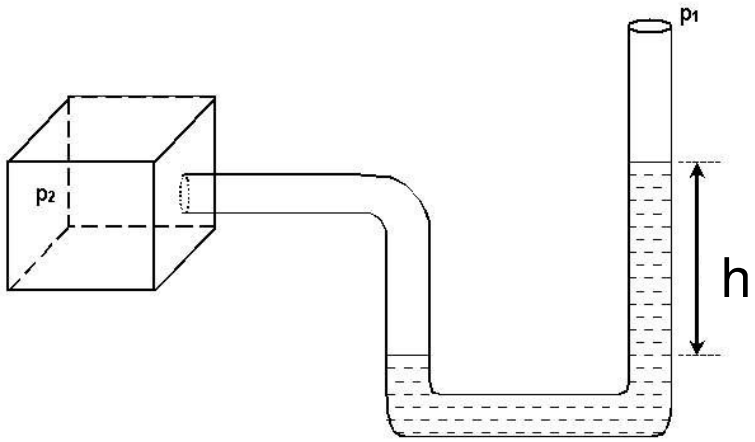


A higanyoszlop magassága tengerszinten: 760 mm.

$p = \rho \cdot g \cdot h =$
$= 13600\ kg/m^3 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot$
$\cdot 0{,}76\ m = 1{,}014 \cdot 10^5\ Pa$

1 Hgmm = 133,4 Pa

Nyomáskülönbség mérése:



Példa: vérnyomásmérés
systoles – éppen elkezd folyni, felső érték
diastoles – már mindig folyik, alsó érték

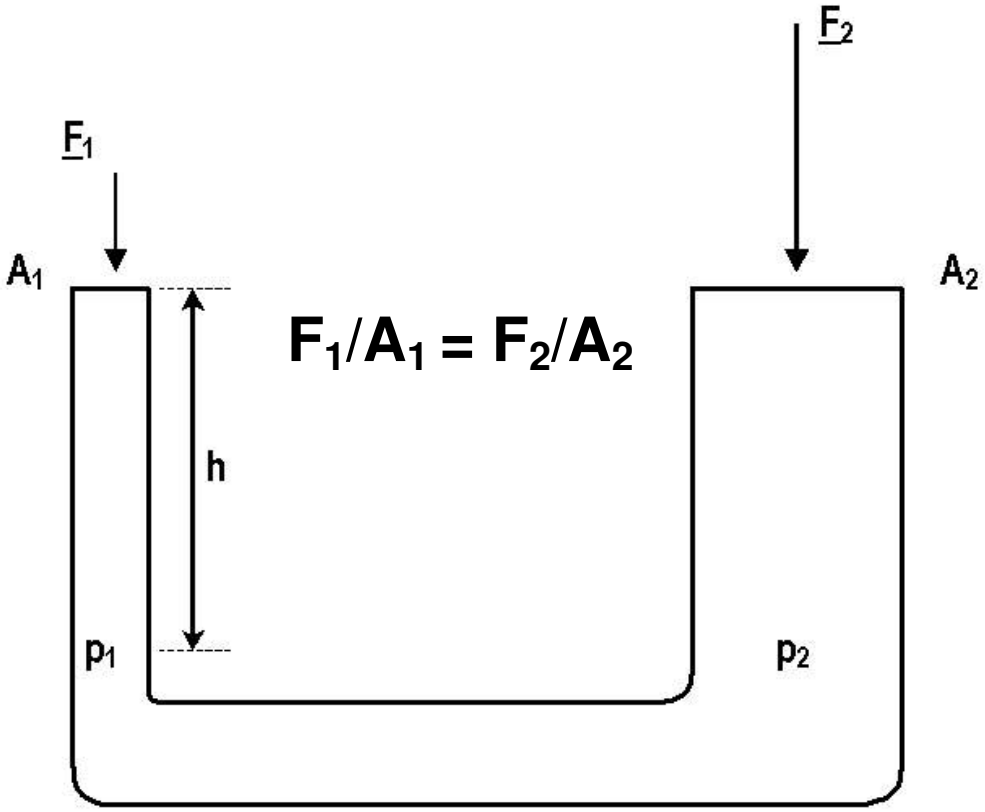
Érték (20 év körül): 120/80 Hgmm
normális: 140/90 Hgmm alatt

Pascal törvénye [Blaise PASCAL, 1623-1662]

– **Nyugvó, zárt folyadékban a nyomás a folyadék minden részébe és a falakra gyengítetlenül továbbterjed.**

– **Súlytalan, zárt folyadékban a nyomás mindenütt ugyanakkora, és nem függ a felületelemek irányításától.**

Hidraulika:



$$F_1/A_1 = F_2/A_2$$

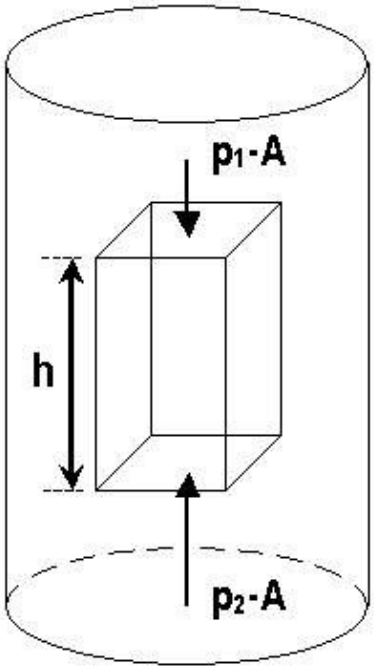
Példa: kocsiemelő

→ a végzett munka ugyanaz, mint amennyivel a kocsi helyzeti energiája megnőtt

5.3. Archimédész törvénye

[ARCHIMÉDÉSZ, Kr. e. 287-212]

Nyugvó folyadékokba helyezett testek esetén



A testre ható felhajtóerő:

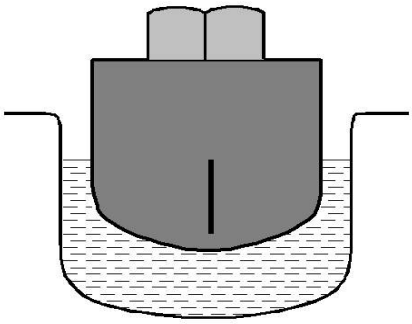
$$F = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A =$$
$$= A \cdot (p_2 - p_1) =$$
$$= A \cdot \rho \cdot g \cdot h = (A \cdot h) \cdot \rho \cdot g = V \cdot \rho \cdot g$$

→ **Testre ható felhajtóerő egyenlő a kiszorított közeg súlyával**

– **úszás feltétele:**

$\rho_{folyadék} > \rho_{test}$

(átlagos sűrűség számít)



– **lebegés:** $\rho_{folyadék} = \rho_{test}$

– **a test súlya a folyadékban:**

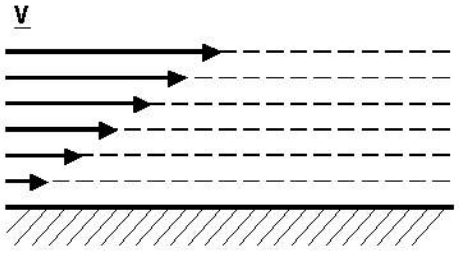
$$G = V \cdot g \cdot (\rho_{test} - \rho_{folyadék})$$

5.4. Mozgó folyadékok (áramlás)

a) **Áramlások fajtái**
- – **Stacionárius** áramlás
  $\underline{v}(\underline{r},t)$ = állandó
- – **Nem-stacionárius** áramlás
  $\underline{v}(\underline{r},t) \neq$ állandó
  ezen belül: **turbulens:** hely és idő szerint gyors változások, örvények

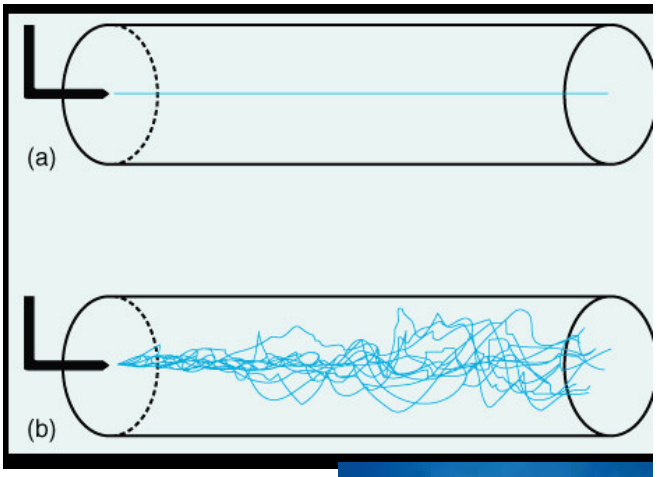
b) Az **áramló közeg** lehet
- – **összenyomható**
  ρ változhat: pl. gázok
- – **összenyomhatatlan**: $\rho(\underline{r},t)$ = állandó
  Folyadékok ≈ összenyomhatatlanok
  Gáz is áramolhat így

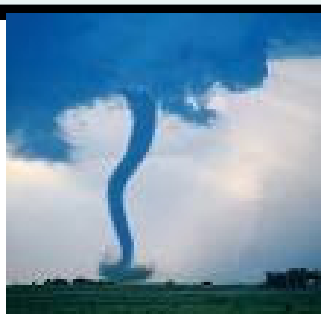
c) A **folyadék** lehet
- – **viszkózus**: a belső súrlódás nagy
  pl.: méz, hideg olaj, szurok, stb.



– **kevéssé viszkózus**: belső súrlódás kicsi
  pl.: víz, alkohol, forró olaj, stb.

d) Az **áramlás** lehet
– **örvénymentes** (lamináris):
csak haladó mozgás
– **örvényes**: haladó mozgás mellett forgó mozgás is

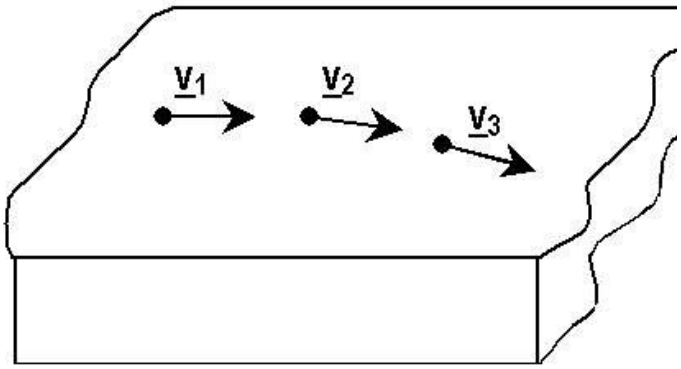




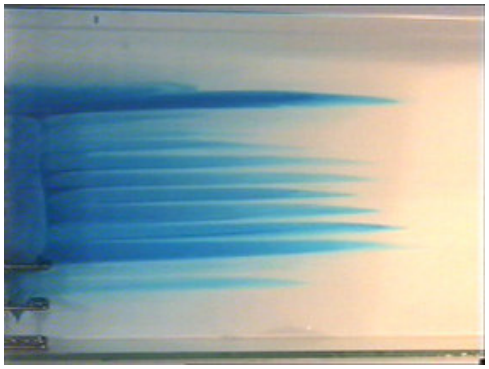
Ha forog, örvényes az áramlás:
Pl.: pohárban forgó víz, tornádó

Áramvonal: folyadékrészecske pályája (trajektória):

Láthatóvá tétele:
megfestett folyadék, gáz, füst stb.

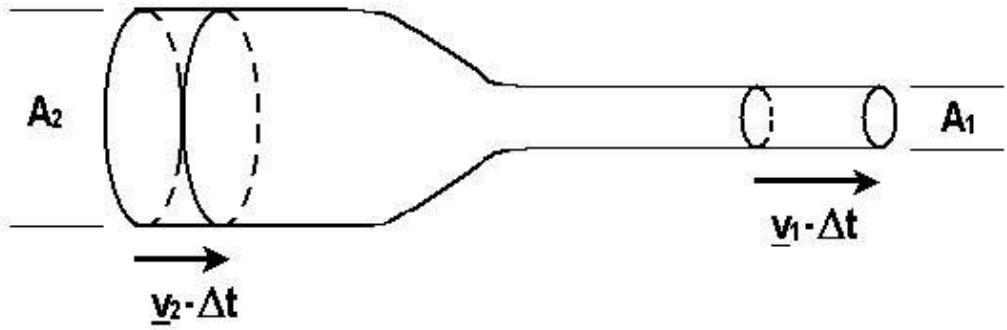


Folyadékok keveredésének, áramlásának vizsgálata:
környezetkutatás *(TTK – Kármán-labor)*



5.5. Az áramlás törvényei

Nincs forrás vagy nyelő: amennyi folyadék befolyik, annyi távozik is:



Δt idő alatt átfolyó anyag tömege:

$$\Delta m = (A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t) \cdot \rho_2 = (A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t) \cdot \rho_1$$

Tömegáramlási sebesség: $\Delta m/\Delta t = A \cdot \rho \cdot v$

Ha ρ_1 = állandó, akkor

$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow$ **kontinuitási egyenlet**

(ha ρ változhat, akkor $A_1 \cdot v_1 \cdot \rho_1 = A_2 \cdot v_2 \cdot \rho_2$**)**

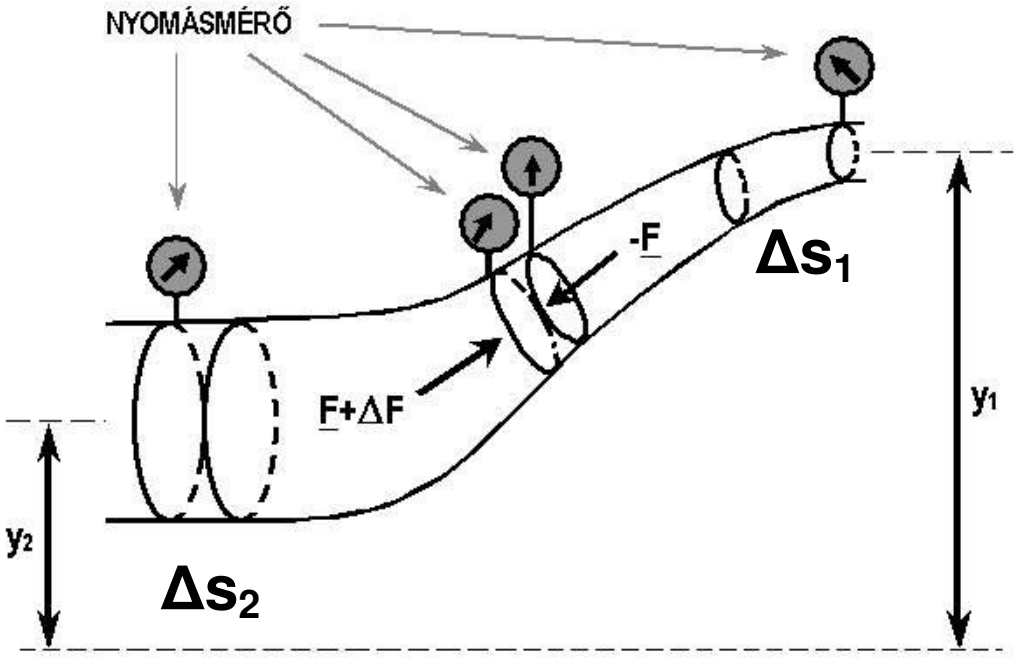
Példák:

- **szűkületnél felgyorsul a folyó**
- **távolra fröcskölő gyerekek**
- **locsolócső, vizipisztoly**

- **Bernoulli egyenlete**

[Daniel BERNOULLI, 1700-82]

Stacionárius, örvény- és forrásmentes, nem-viszkózus, összenyomhatatlan közegre (folyadék, gáz) vonatkozik



A folyadék mozgási és helyzeti energiájának változását a nyomás munkája fedezi:

$$\Delta E_{Mechanikai} = \left(\frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot y_1 \right) - \left(\frac{m \cdot v_2^2}{2} + m \cdot g \cdot y_2 \right) =$$

$$= \left(p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta s_2 - p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta s_1 \right) = \left(p_2 - p_1 \right) \cdot \frac{m}{\rho}$$

Ebből átrendezéssel kapjuk:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot y_2 = \text{állandó}$$

$p + \rho \cdot v^2/2 + \rho \cdot g \cdot y =$ állandó

- **Ha nincs áramlás: $v = 0$**
  $\rightarrow \; p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h$ **(hidrosztatikai nyomás)**

- **Ha $y_1 = y_2$ (nincs szintkülönbség):**
  $p + \rho \cdot v^2/2 =$ állandó

Megjegyzések:

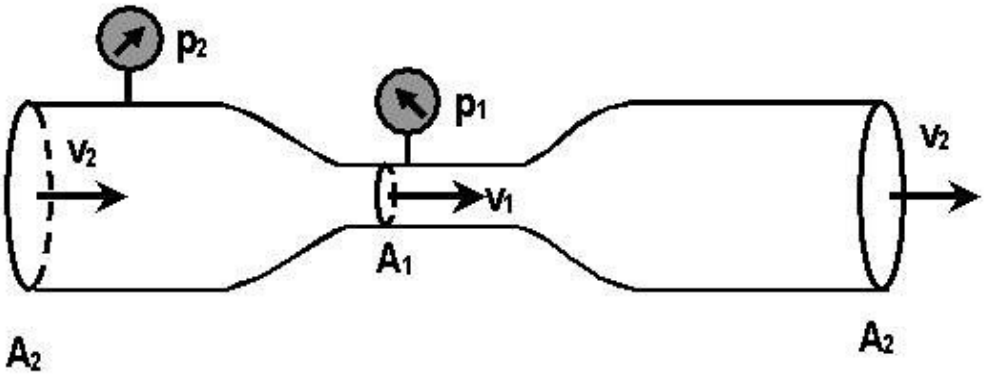
- **A Bernoulli-egyenletet az energiamegmaradásból kaptuk, de a sebesség megváltozásának dinamikai oka mindig a Newton-törvény (erőhatások okozta gyorsulás).**

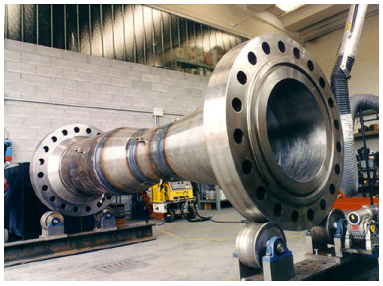
- **A sebesség megváltozásának *oka* a nyomáskülönbség, és nem a sebességkülönbség *okozza* a nyomásváltozást.**

Lényeg:
nagyobb sebesség $\Leftrightarrow$ kisebb nyomás

Ha az áramlás útjába akadályt teszünk:
v = 0 → torlódási pont.
Itt $\rho \cdot v^2/2$ túlnyomás keletkezik.
→ ez a dinamikai, vagy torlónyomás.

a) Sebességmérés Venturi-csővel





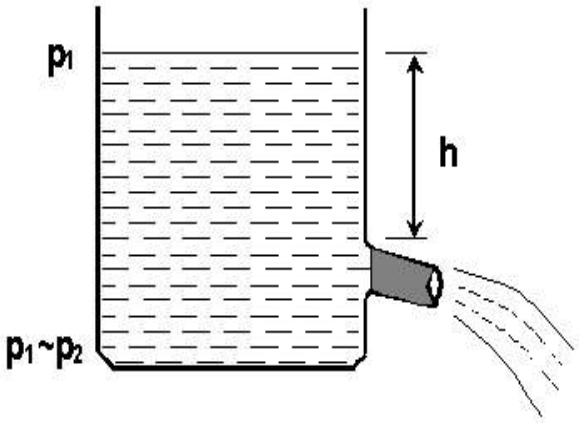
$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \cdot \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right]}}$$

b) Tartályból kiömlő folyadék sebessége



$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot \rho + \rho \cdot g \cdot h =$$

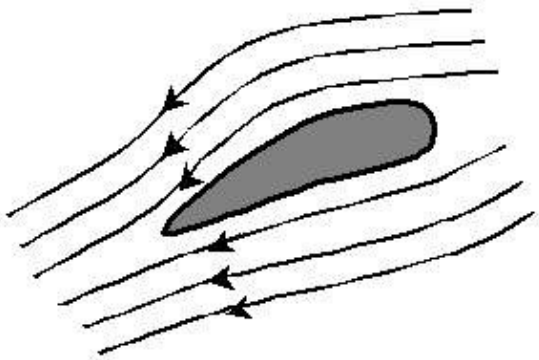
$$= p_2 + \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot \rho + 0;\ p_1 \approx p_2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g}$$

Példák:

– teherautó ponyvája

– repülőgépszárny



$v_{fent} > v_{lent}$

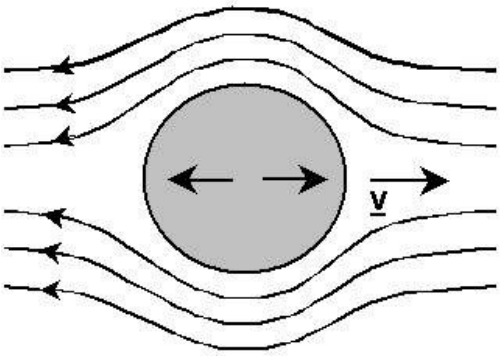
$p_{fent} < p_{lent}$

→ felhajtóerő

(a dinamikai magyarázat bonyolultabb)

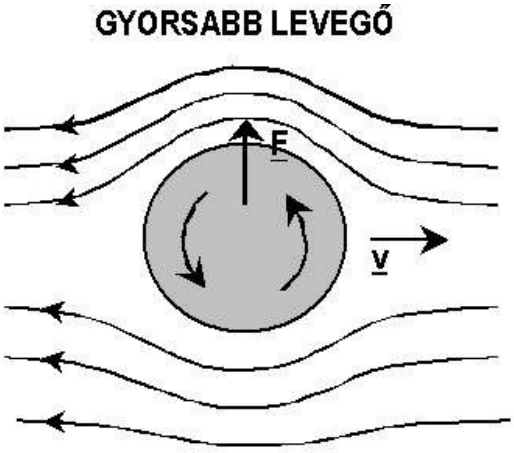
– síugró: ezt utánozza

– pörgő labda



NINCS FORGÁS

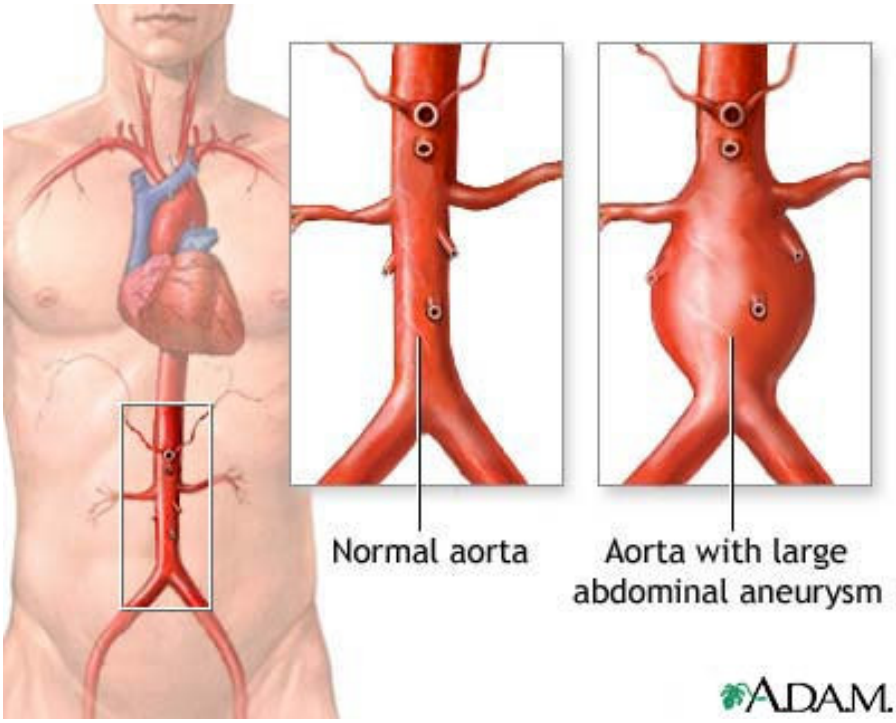
⇒ EGYENES PÁLYA



LASSABB LEVEGŐ

⇒ ELHAJLÓ PÁLYA

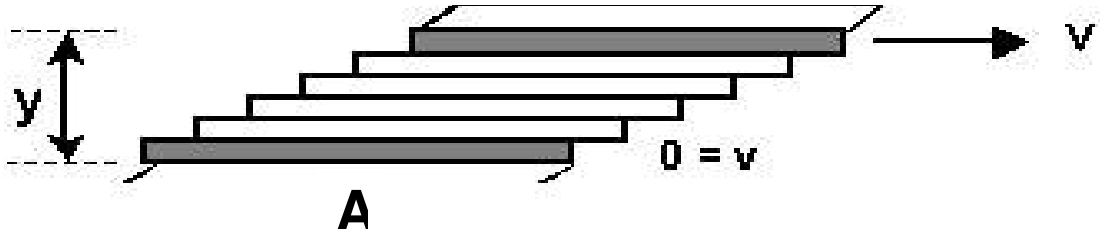
– Érrendszerben: aorta-tágulat
tágulat → lelassuló vér →
nagyobb nyomás: repedésveszély
→ aortarepedés



5.6. Viszkózus folyadékok

Jelenség: a molekuláris hatások a szomszédot gyorsítani (lassítani) akarják (ideális folyadék: nincs viszkozitása)

Réteges (lamináris) áramlás



A nyíróerő: $F \sim A \cdot \frac{v}{y}$ $\qquad F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$

η: viszkozitás

SI egysége → [N·s/m^2] = [Pa·s] = [kg/(m·s)]

régi (még használt) egység: 1 P(oise)=0,1Pa·s

Arra jellemző mennyiség, hogy a folyadék „mennyire könnyen folyik”.

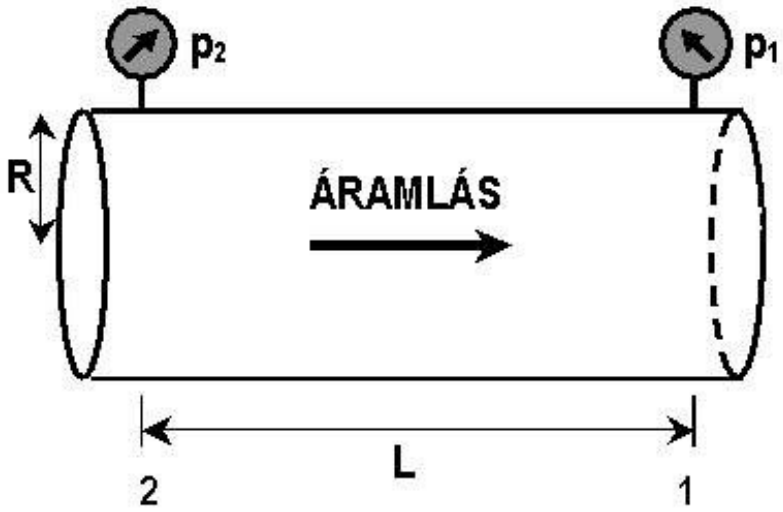
víz (η= 0,01 Poise) **méz** (η=3 Poise)

Néhány anyag viszkozitása (centiPoise)**:**

KÖZEG	T (^oC)	η (cP)
levegő	0	0,0171
	20	0,0182
	40	0,0193
CO_2	20	0,0147
He	20	0,0196
vér	37	4
glicerin	20	1500
metil-alkohol	20	0,584
víz	0	1,78
	20	1,00
	40	0,651

- **A Poiseuille-törvény** *(1839-1841)*

Az összenyomhatatlan, viszkózus folyadékok lamináris, stacionárius áramlásához szükséges nyomáskülönbséget adja meg.



paraméterek: L, Δp, R, η, Q(m^3/s)

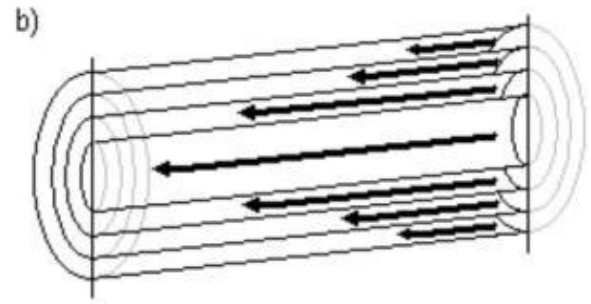
A csövön átfolyó anyag térfogata időegységenként:

$$Q = \pi \cdot R^4 \cdot \left[\frac{p_2 - p_1}{8 \cdot \eta \cdot L} \right]$$

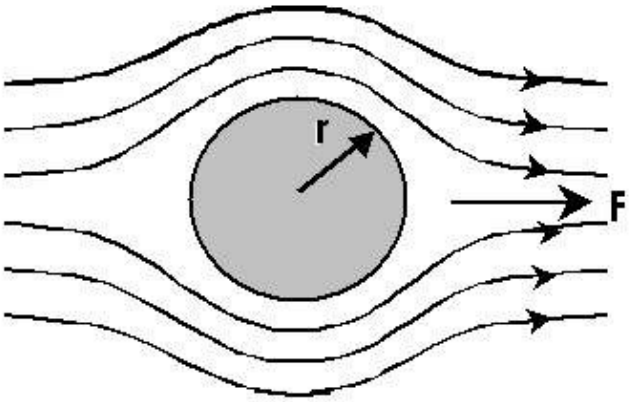
Példák:

– olaj-távvezeték

– izom tevékenységének fokozása: kapillárisok tágításával



- **Stokes-törvény** *(1845)*



lamináris áramlásba helyezett golyóra ható erő:

$$F = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

Elméleti úton vezették le
→ a tapasztalat igazolta

5.7. Turbulens áramlások

Nagy sebességnél: a stacionárius réteges (lamináris) áramlás turbulens (örvényes) áramlásba megy át.

Kritérium → Reynolds-szám (dimenziótlan)
r: csősugár, ρ: sűrűség, v: áramlási sebesség, η: viszkozitás:

$$R = \frac{\rho \cdot r \cdot v}{\eta} \left[\frac{\frac{kg}{m^3} \cdot m \cdot \frac{m}{s}}{\left(\frac{kg \cdot m}{s^2} \right) \cdot \frac{1}{m^2} \cdot s} \right]$$

ha ez nagyobb, mint 1160 → turbulens

Példák:

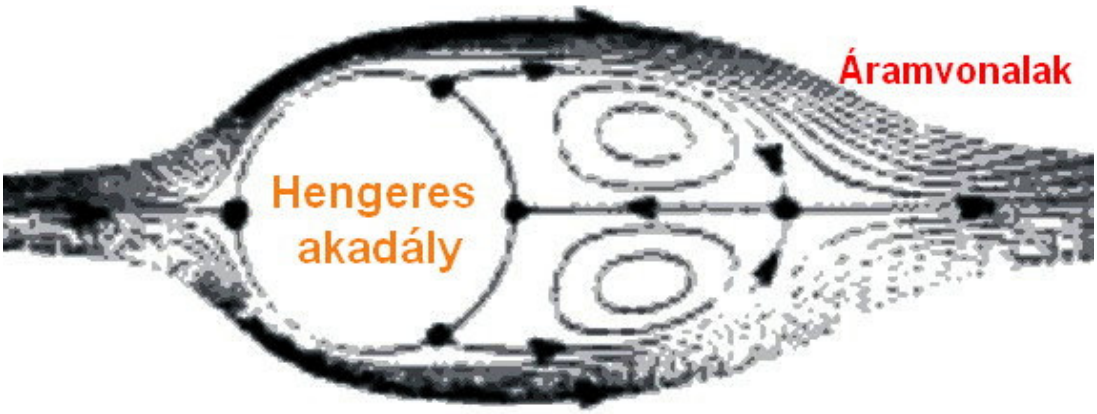
víz 1mm-es csőben v < 1,16 m/s →
nem turbulens (*alacsony sebesség*)

vízvezetékben általában turbulens áramlás

levegőre ρ/η 14-szer kisebb → 14-szer nagyobb sebességekig nem turbulens

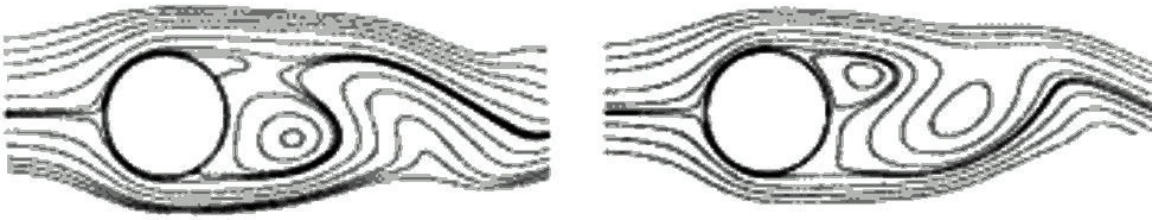
Reynolds vizsgálatai szerint (1883) →
azonos Reynolds-féle számnál hasonló áramlási viszonyok

Hasonlóság kiterjed a teljesen hasonló erőviszonyokra → szélcsatorna kísérletek



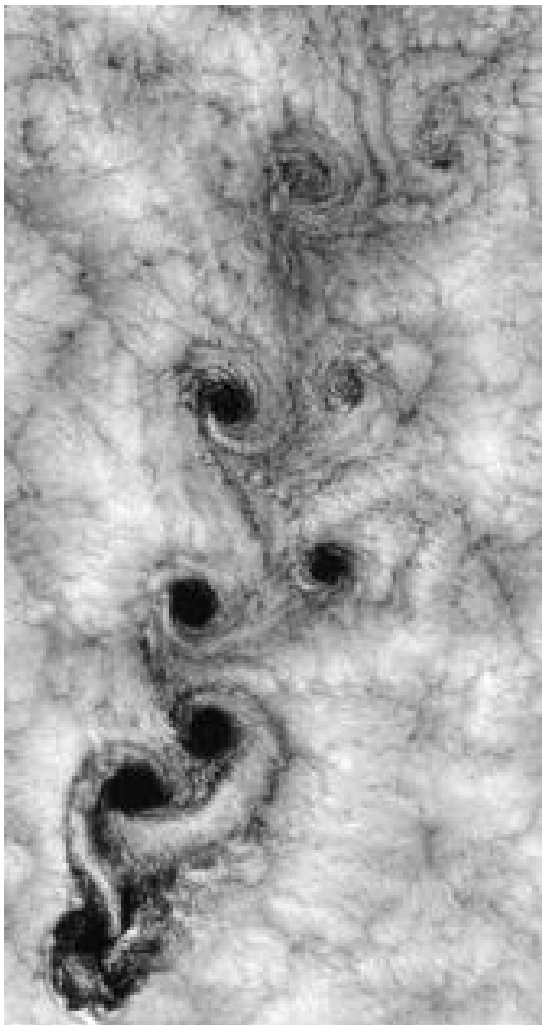
Két örvény az akadály mögött: henger előtt behelyezett részecske mindig elkerüli

Nagyobb sebességeknél: belső súrlódás miatt instabil örvények keletkeznek
Kármán Tódor** (1881-1963) **vizsgálta őket
Az áramlás útjába tett henger mögött egymás után sorakozó örvények
→ ezek sorra leválnak:
Kármán-féle örvényút szigorúan periodikus



A felváltva keletkező örvények miatt...

- **lobog a zászló**
- **zizegnek a légvezetékek**
- **rezeg a rúd alakú evező**
- **szakadt le a Tacoma Narrows-híd** (1940)



6. HULLÁMMOZGÁS. TULAJDONSÁGAI, SZUPERPOZÍCIÓJUK, INTERFERENCIÁJUK.

6.1. A hullámmozgás

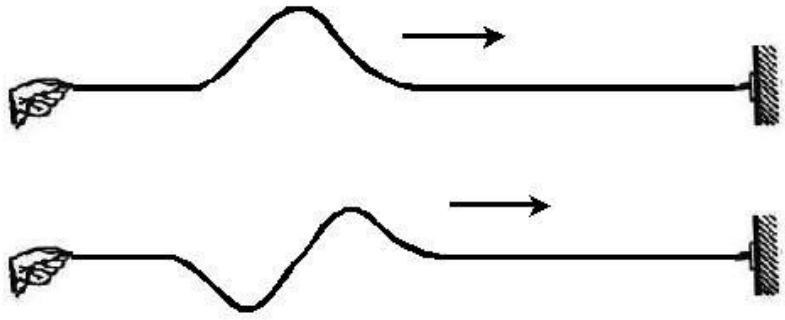
Hullám: haladó zavar

- **– nincs hosszútávú anyagmozgás**
- **– a hullám energiát közvetít.**

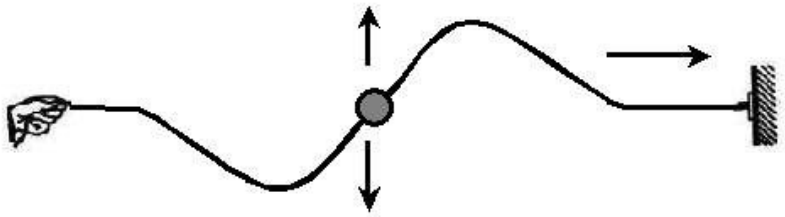
Példa: motorcsónak – horgászcsónak

A hullám lehet:

- **– Transzverzális: részecske kitérése merőleges a haladási irányra**
- **– Longitudinális: részecske párhuzamos a haladási iránnyal**



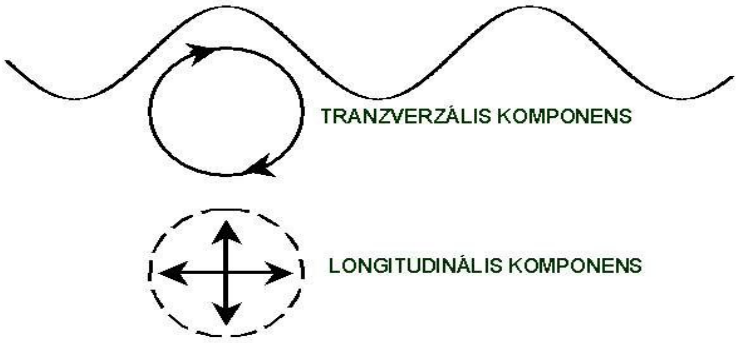
TRANZVERZÁLIS: - RÉSZECSKE KITÉRÉSE ⊥ A HALADÁSI IRÁNYRA



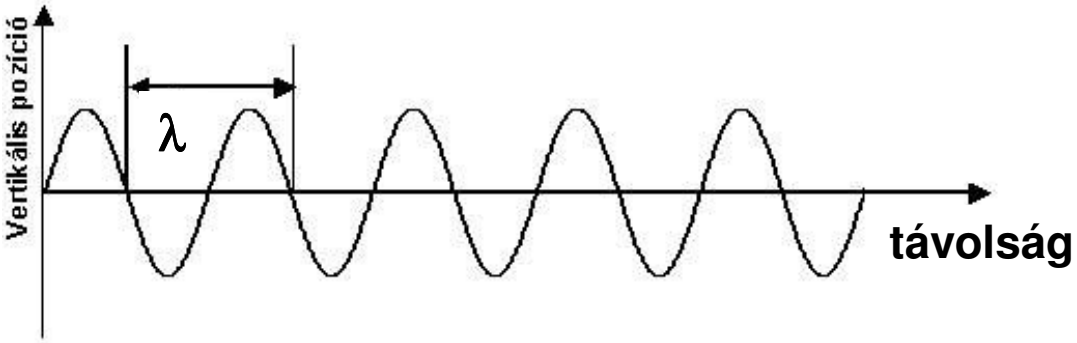
LONGITUDINÁLIS: - RÉSZECSKE KITÉRÉASE || A HALADÁSI IRÁNYRA

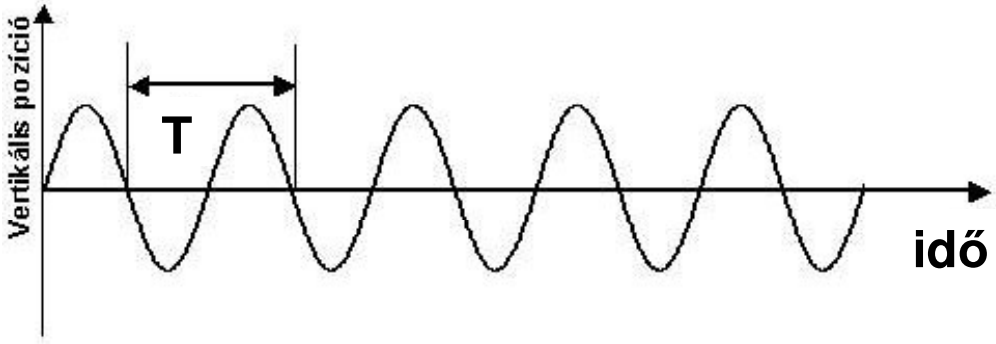
A transzverzális és longitudinális hullámok leggyakrabban periodikusak.
Legtöbb esetben: a kiválasztott részecske harmonikus rezgőmozgást végez

Példa: – **rugó,**
– **elektromágneses hullám,**
– **hang,**
– **vízhullám** (nem tisztán transzverzális):



- **Hullámhossz:**





- **Frekvencia:**
  $f = 1/T$ ($\omega = 2\pi \cdot f$). T: periódusidő
  egysége: 1/s = 1 Hz (Herz)

- **Fázis: a részecske rezgési állapota:**
  a perióduson belüli helyzete.
  Hullám (fázis)sebessége: azonos fázisú állapot haladására jellemző:

  $$v = \lambda/T$$

  Példa: – Kossuth rádió ($v = 3 \cdot 10^8$ m/s)
  540 kHz $\rightarrow \lambda$ = 556 m

  – Petőfi rádió
  94,8 MHz $\rightarrow \lambda$ = 3,16 m

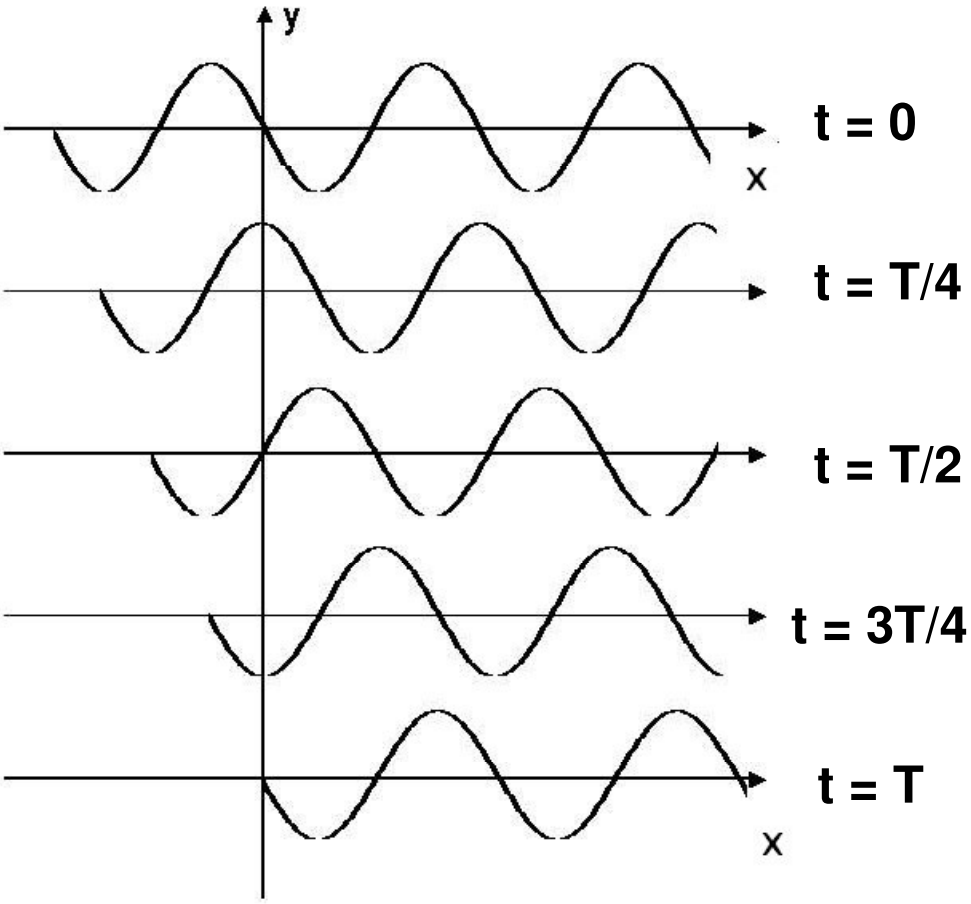
  – hullám sebessége húron:

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/L}}$$

L: hossz,
m: tömeg;
F: feszítőerő
m/L: lineáris sűrűség

Hullám fázissebessége ≠ részecske sebessége

6.2. A hullámmozgás leírása



$$y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot f \cdot t - 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \right)$$

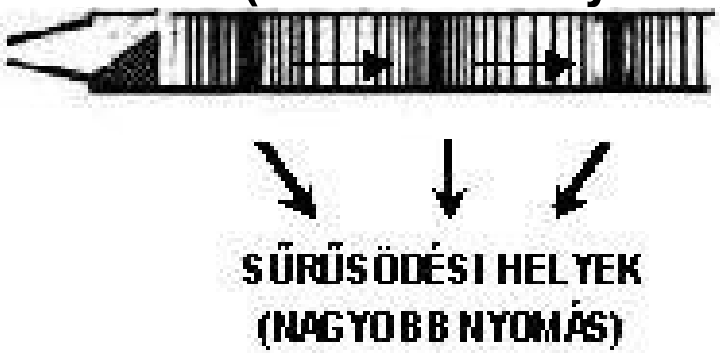
$$+x \rightarrow y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot f \cdot \left(t - \frac{x}{v} \right) \right)$$

$$-x \rightarrow y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot f \cdot \left(t + \frac{x}{v} \right) \right)$$

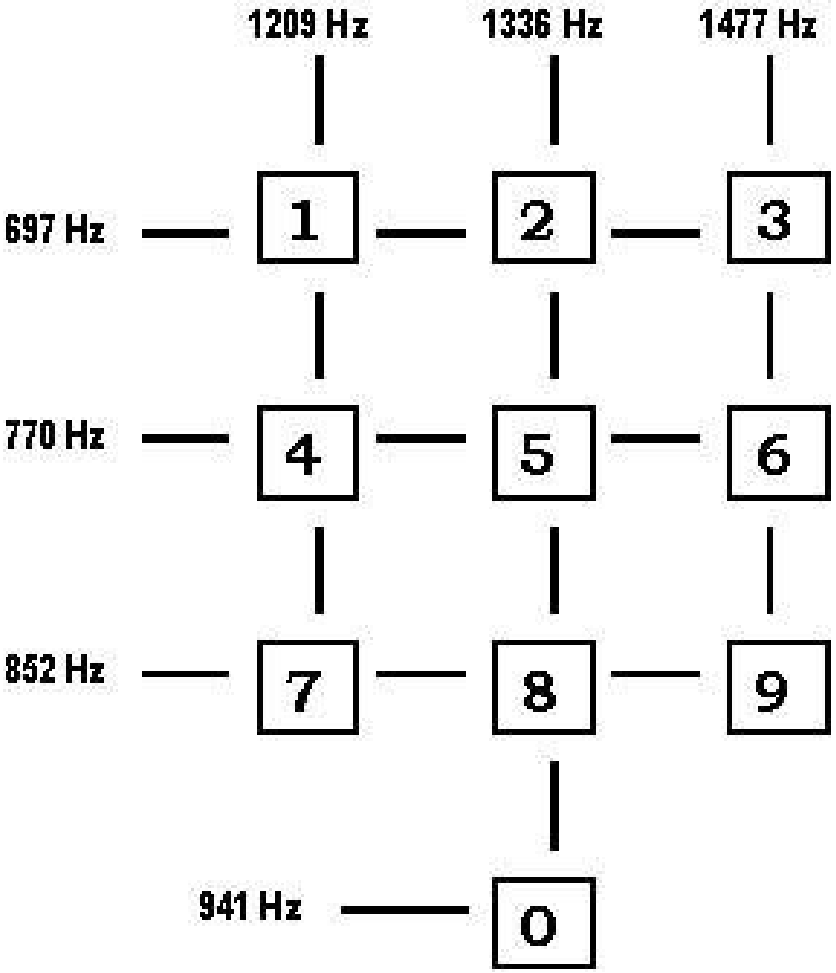
Rögzített x –re és rögzített t –re is harmonikus hullámot kapunk.

6. 3. A hang

Gázban (levegőben) csak longitudinális hullámok vannak (nincsenek nyíróerők):



Emberi fül érzékenysége: 20 Hz – 20 kHz
(Életkorral csökken a felső határ.)
Példa: telefonok – impulzus üzemű
– hang (tone) **üzemű**
Hang üzemű:



Tárcsázás: két tiszta hangfrekvencia

20 Hz alatt: infrahang
20 kHz felett: ultrahang
kutya: ≈ 30 kHz-ig hall
denevér: ≈ 100 kHz-ig hall, tájékozódik

- **Hangsebesség**

levegő (20 °C, 1 atm.): v ≈ 343 m/s.

Különböző hőmérsékleteken: $v \sim \sqrt{T}$ **,**

más gázokra: $v \sim 1/\sqrt{m}$ (*m* a molekulatömeg)

folyadékban, szilárd testben: lényegesen nagyobb sebességek, v ~ $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ **;** (ρ a sűrűség)

Példák hangsebességekre (m/s):

levegő (0°)	331
levegő (20°)	343
CO_2 (0°)	259
O_2 (0°)	316
He (0°)	965
réz	5010
üveg	5640

kloroform (20°)	1004
alkohol (20°)	1162
Hg (20°)	1450
víz (20°)	1482

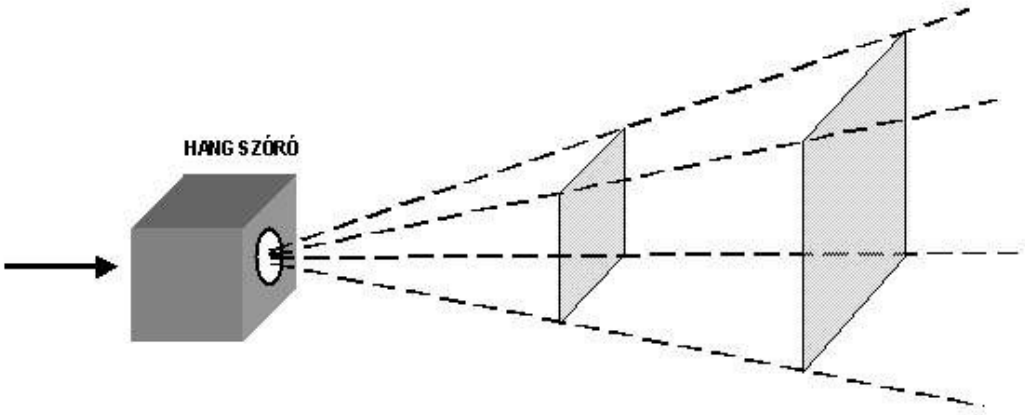
Példák:

– Milyen messze villámlott?

– Auto-fókuszáló fényképezőgép (ultrahang-echó, 1986),

– ultrahangos távolságmérő.

6.3.2. A hang intenzitása



Egységnyi felületen átmenő teljesítmény:

$$I = \frac{P}{A}; egysége: \frac{W}{m^2}$$

Teljes térbe való egyenletes sugárzásnál:

$$I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \rightarrow I \approx \frac{1}{r^2}$$

Visszavert hangok esetén –
pl. zárt teremben éneklőnél – nem igaz!

• **Emberi hallás**

Hallásküszöb: 1000 Hz-nél 10^{-12} W/m^2, és függ a frekvenciától

Fájdalomküszöb (halláskárosodás): 1 W/m^2

A fül érzékelőinek válasza az intenzitásra közel logaritmikus.

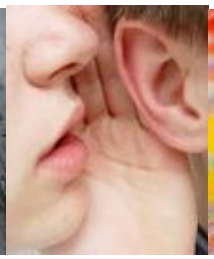
Intenzitásszint: decibel (dB)

$\beta(dB) = 10 \cdot \log (I/I_0)$ (tízes alapú logaritmus)

[dimenzió nélküli mennyiség], ahol

$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 **(a hallásküszöb 1 kHz-nél).**

Példák:	(W/m^2)	dB
hallásküszöb	10^{-12}	0
suttogó falevél	10^{-11}	10
suttogás	10^{-10}	20
beszélgetés (1 m)	3.10^{-6}	65
autó belseje	10^{-4}	80
autó kifogó nélkül	10^{-2}	100
diszkó	1	120
vészsziréna	100	140



Emberi tapasztalatok:

- **ΔdB ≈ 1 dB a legkisebb észrevehető intenzitáskülönbség,**
- **Pl. 90 dB-ről 93 dB-re**

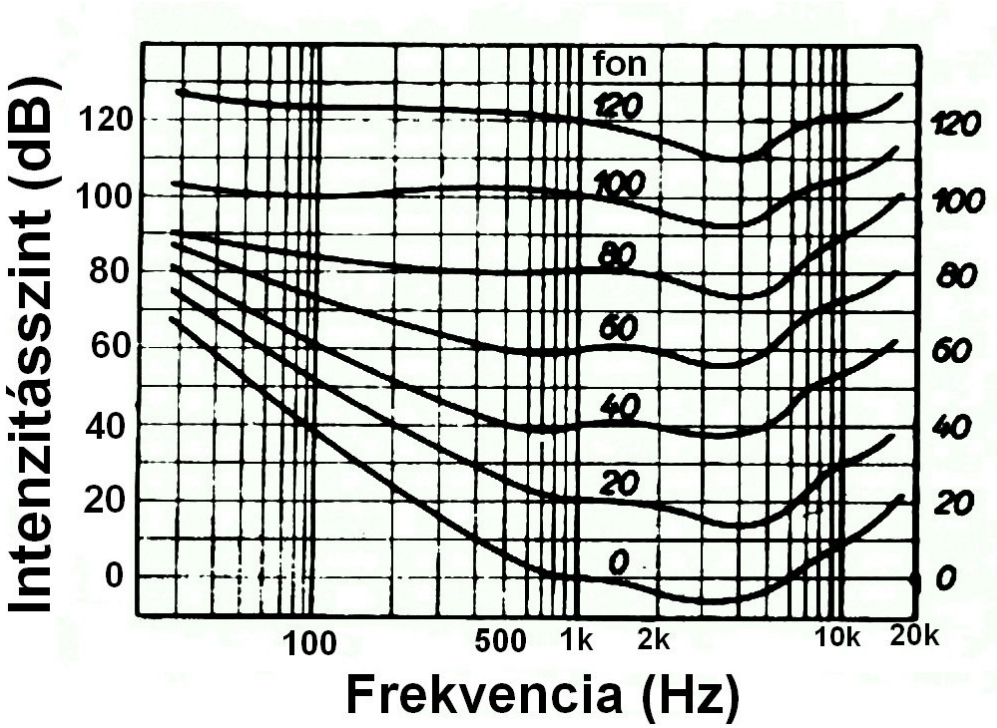
  ΔdB = 3 = 10·log(I_2/I_0) – 10·log(I_1/I_0) =

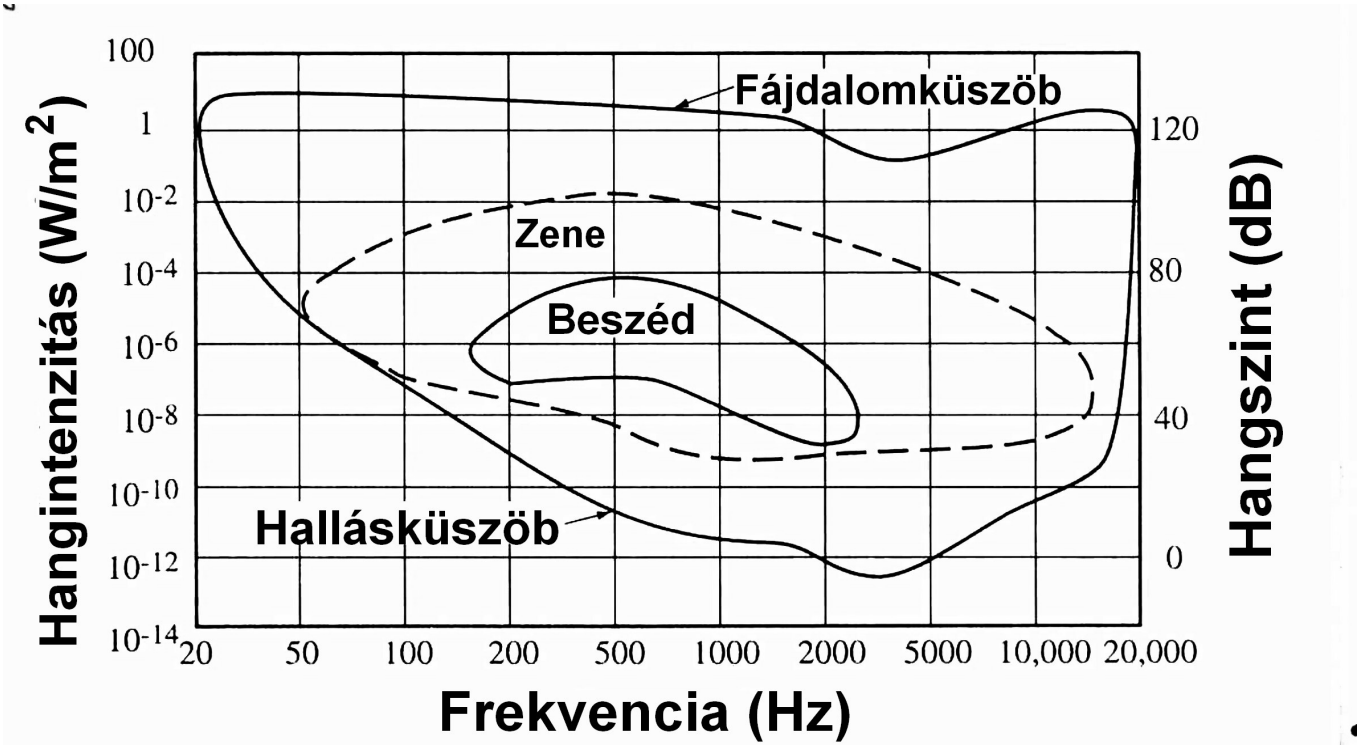
$$= 10 \cdot \log \frac{I_2 \cdot I_0}{I_0 \cdot I_1} = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_1}$$

  → $I_2/I_1 = 10^{0,3}$ =1,995 ≈ 2

  → kétszeres hangintenzitás

- **Intenzitásszint 10 dB-vel nő → embernek kb. „kétszer olyan hangos” (20 W hangszóró kb. fele olyan „hangos”, mint a 200 W-os)**
- **Frekvenciatartomány: 20 Hz – 20 kHz (legfeljebb). Fon: a hang hangossága: 1 kHz-nél az intenzitás-szinttel egyezik a fon értéke:**

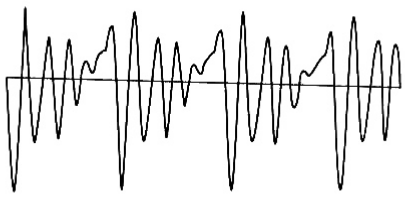




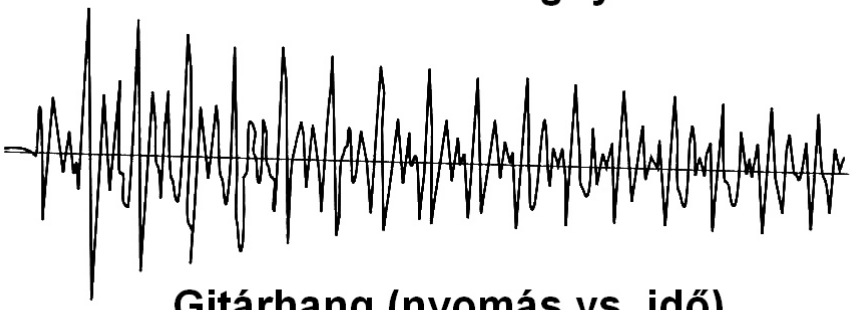
- **A hang nyomása**

$$I \sim p^2 \rightarrow \frac{I}{I_0} \sim \left(\frac{p}{p_0}\right)^2$$

Hallásküszöb: 20μPa
fájdalomküszöb: 100 Pa



Simán változó hangnyomás

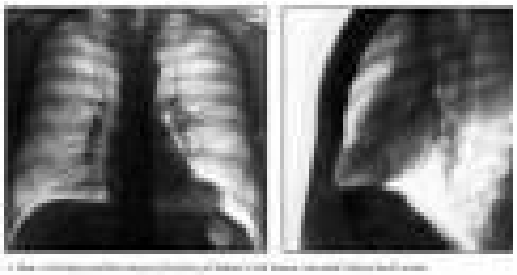


Gitárhang (nyomás vs. idő)

Hangnyomás-szint: $SPL(dB) = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$

hangintenzitás-szint: $\beta(dB) = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$

- **Alkalmazások:**
  - **hangradar: mélységmérés hajóknál, halrajok, stb.**
  - **ultrahang: impulzus – visszaverés**
  - **orvosi ultrahang felvétel (pl.: echocardiographia)**



1 MHz < ν < 15 MHz →

$\lambda_{5\ MHz}$ =

= 1540 m/s / ($5 \cdot 10^6$ Hz)

≈ 0,3 mm

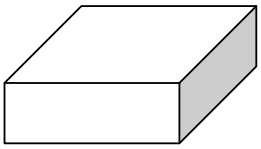
az ennél nagyobb elváltozások már láthatók.

elv: a szövethatáron a hang visszaverődik

területek: vese, máj, magzat, daganatok, belső vérzések, szív stb.

- **ultrahangos tisztítás**

ékszerek, apró tárgyak



tisztító folyadék

ultrahang (≈ 40 kHz)

vákuumkavitációk → tisztítás

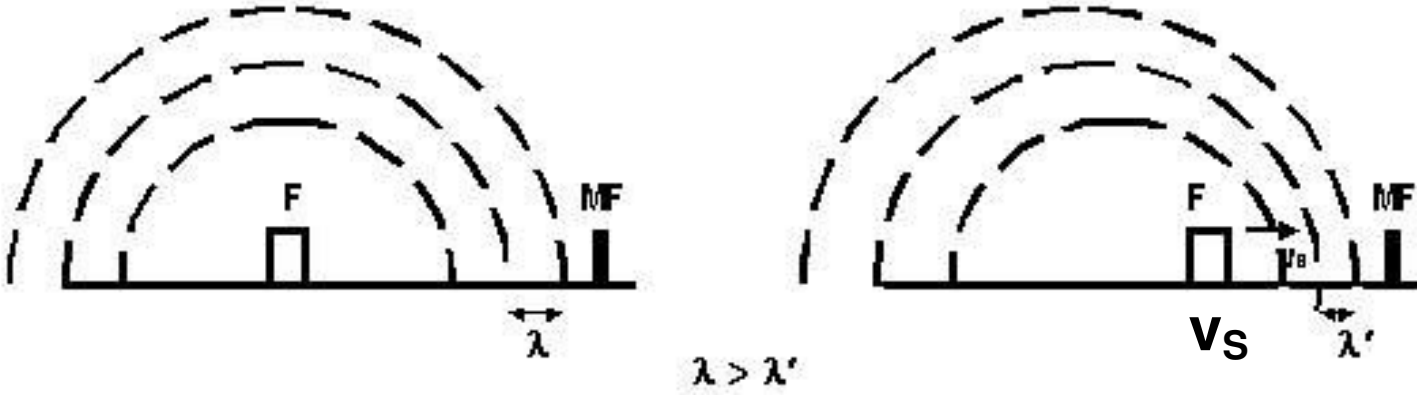
6.4. A Doppler-jelenség

[Christian DOPPLER, 1803-1853, osztrák,
Selmecbányán is tanár, 1842]

a) Mozgó forrás, álló megfigyelő

A hullámhegyek gyakrabban érkeznek a fülünkhöz, ha a forrás közeledik hozzánk (csökken a hullámhossz)

→ nagyobb frekvencia → magasabb hang



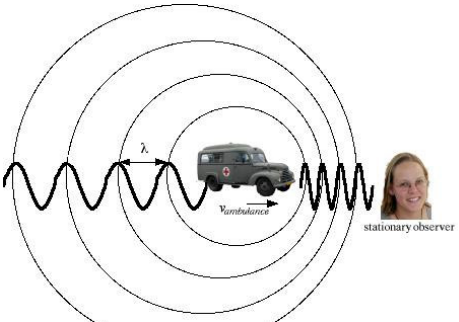
$$f = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad \lambda' = (\lambda \mp v_s \cdot T) \quad \rightarrow$$

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \left(\frac{v}{\lambda \mp v_s \cdot T} \right) = \frac{f}{1 \mp \frac{v_s}{v}}$$

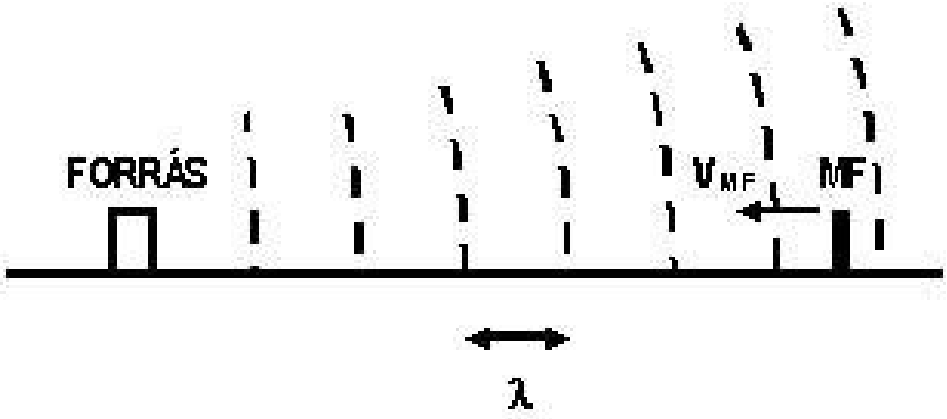
Előjelek:

– → megfigyelő felé mozog

+ → megfigyelőtől távolodik



b) A forrás áll, a megfigyelő mozog
ugyanannyi idő alatt több nyomáshullám éri a fülét, ha a megfigyelő közeledik a forráshoz (nő a frekvencia)



$$f' = f + \frac{v_{MF}}{\lambda} = f \cdot \left(1 + \frac{v_{MF}}{\lambda \cdot f}\right)$$

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v_{MF}}{v}\right)$$

c) Mindkettő mozog

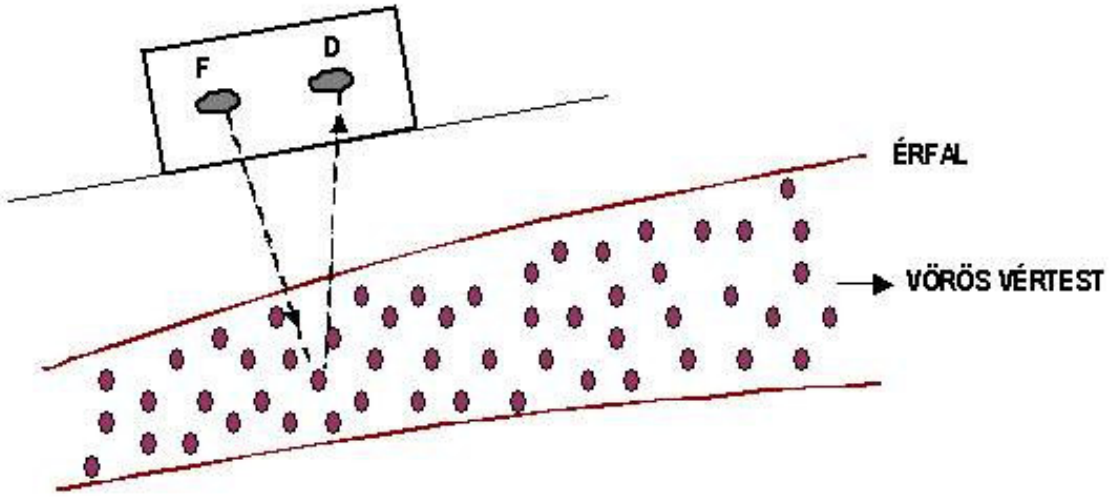
$$f' = f \cdot \left(\frac{1 \mp \frac{v_{MF}}{v}}{1 \pm \frac{v_s}{v}}\right)$$

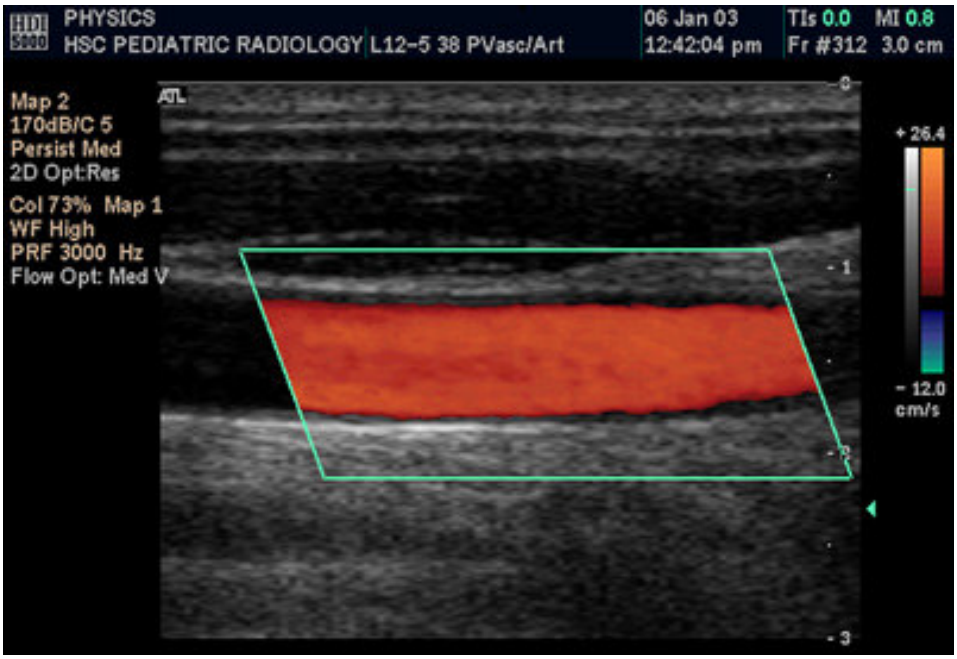
itt a v_{MF}, v_S, v sebességeket mindig pozitívnak választjuk, és a +, – előjelekkel fejezzük ki az irányukat.

Példa:

– Doppler vérsebesség-mérő (pl. nyaki érszűkület),

– áramlásmérő



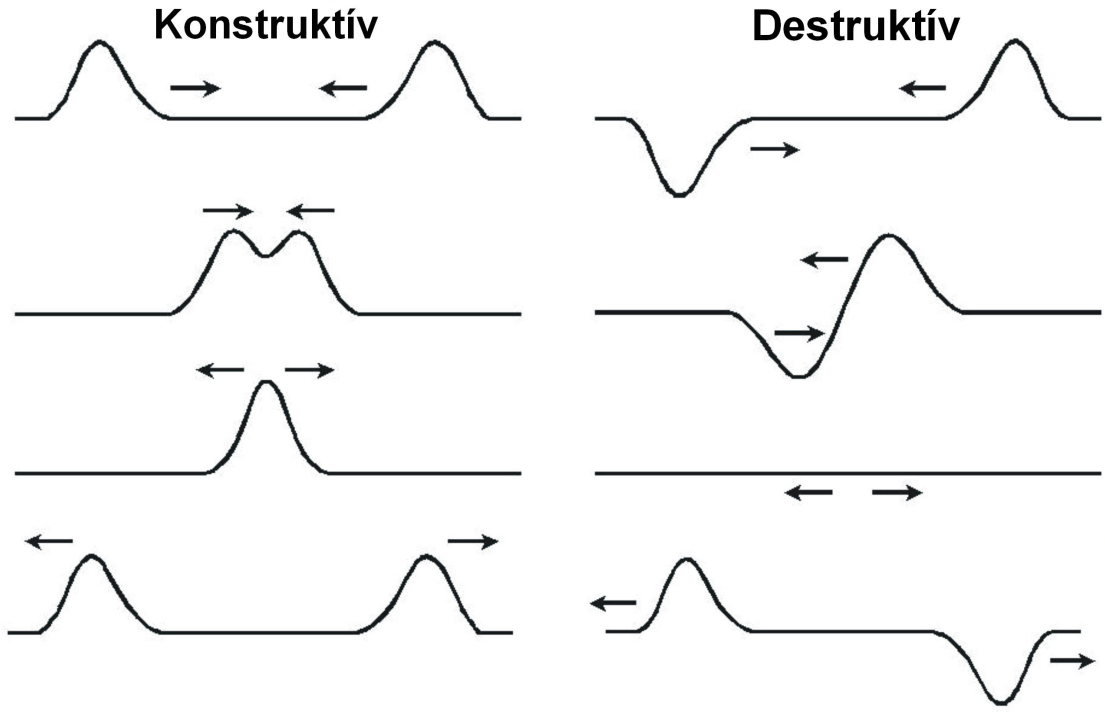


$f \approx 5$ MHz; $\Delta f \approx 600$ Hz; $v_{vér} \approx 10$ cm/s

6.5. Hullámok szuperpozíciója, interferenciája

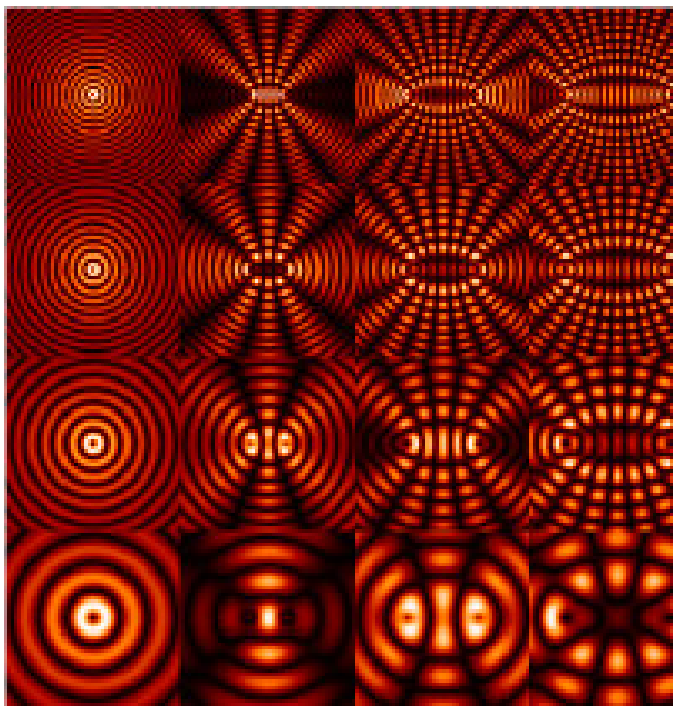
Két, vagy több hullám ugyanakkor egy helyen → összeadódnak → interferencia

Példa:

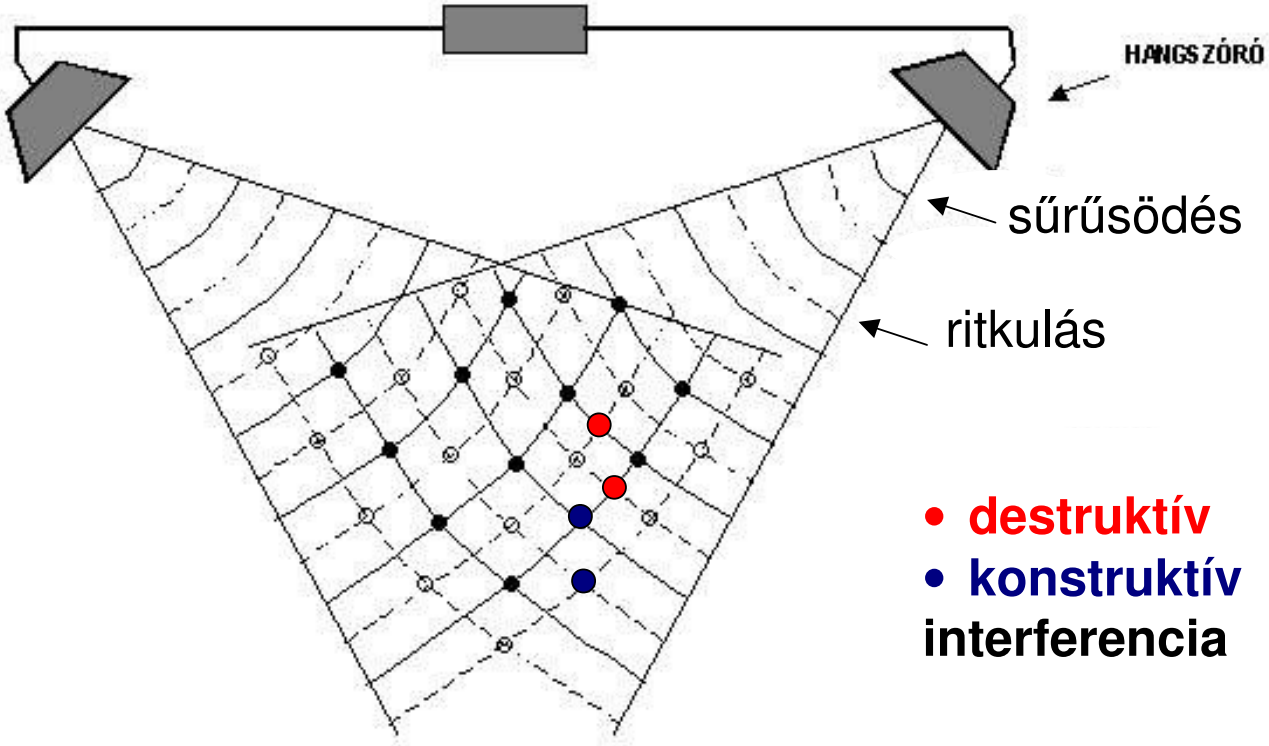


Szuperpozíció elve: két vagy több hullám ugyanakkor egy helyen → eredmény: hullámok összege

(lineáris rendszereknél egyszerűen összeadódnak)



Példa: – hangszórókból azonos frekvenciájú, azonos amplitúdójú hang szól



- **destruktív**
- **konstruktív**

interferencia

Koherens hullámok: különböző források által, időben állandó fáziskülönbséggel kibocsátott hullámok.

Interferencia: erősítő: $\Delta L = n \cdot \lambda$

(ΔL: úthosszkülönbség a hullámok között, n: egész szám)

gyengítő: $\Delta L = \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda$

Az interferencia-mintázat időben állandó, ha koherensek a hullámok.

Két azonos frekvenciájú rezgés összege más fázisokkal:

$$\sin(\omega t+\alpha)+\sin(\omega t+\beta)=\sin(\omega t)\cos\alpha+$$
$$+\cos(\omega t)\sin\alpha+\sin(\omega t)\cos\beta+$$
$$+\cos(\omega t)\sin\beta=$$
$$=\sin(\omega t)(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos(\omega t)(\sin\alpha+\sin\beta)$$

Ez éppen egy A amplitúdójú, φ fázisú rezgés:

$$A\sin(\omega t+\varphi)=A\sin(\omega t)\cos\varphi+A\cos(\omega t)\sin\varphi$$

Azonosítva a mennyiségeket:

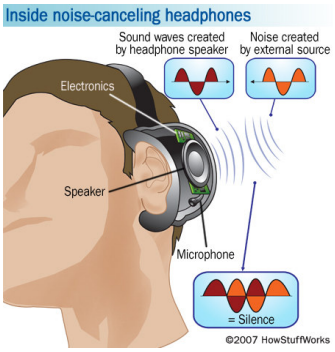
$$A\cos\varphi=\cos\alpha+\cos\beta$$
$$A\sin\varphi=\sin\alpha+\sin\beta$$

A két egyenlet négyzetének összege:

$$A^2=(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=$$
$$=2+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta=2(1+\cos(\alpha-\beta))$$

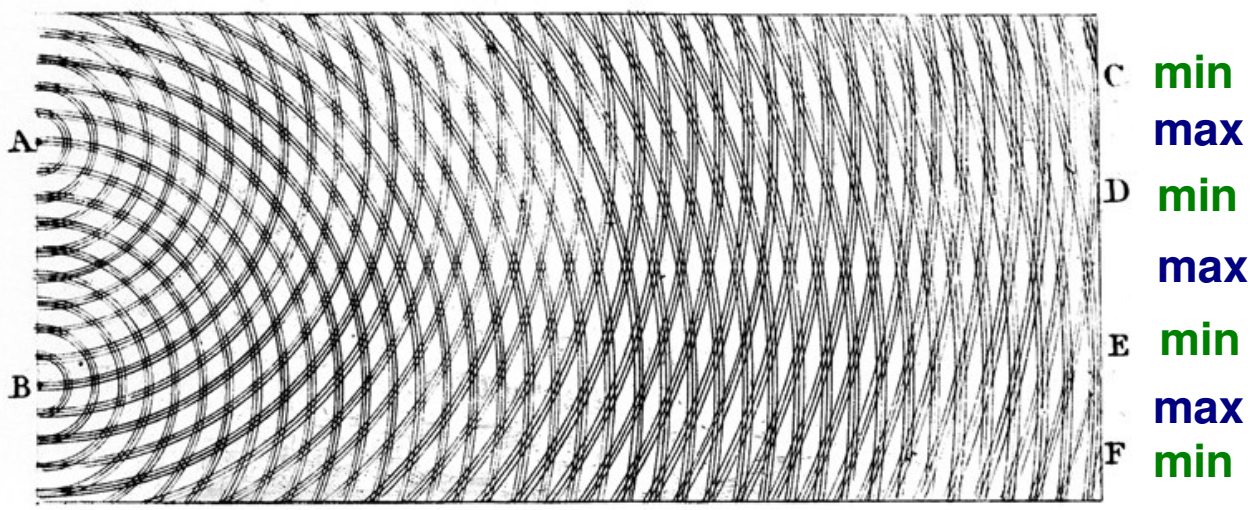
Tehát ha $\alpha=\beta+2n\pi$: **A=2, erősítés**
és ha $\alpha=\beta+\pi+2n\pi$: **A=0, kioltás**

Példa: – zajelnyomó **fülhallgató**,
– fényforrások, **lézer**.

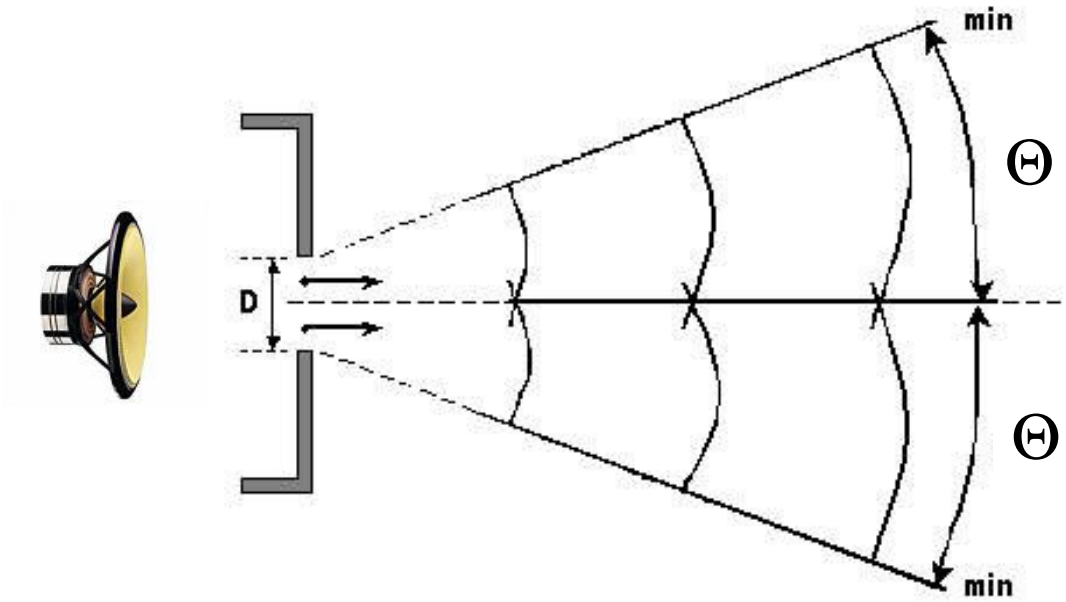


Diffrakció (**hullámok elhajlása**):

Thomas Young ábrája (1803):



Maximumok és **minimumok** jelennek meg!
A gyengítés és erősítés helyei váltakoznak.



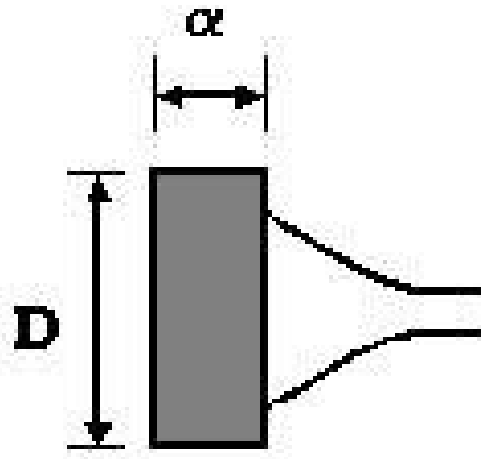
A hangerő a Θ szögben lesz a legkisebb.

első minimum iránya: $\sin\Theta = \frac{\lambda}{D}$

Kör alakú nyílás esetén:

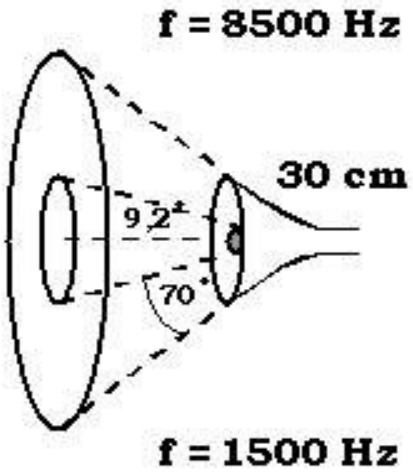
$$\sin\Theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Példák: – diffrakciós kürt-hangszóró :



a hangszóró keskeny szája nagy térszögben teríti szét a hangot

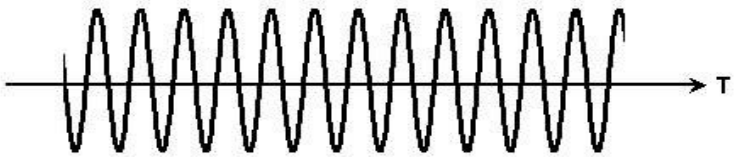
– Hangszóró: a terítés frekvenciafüggő



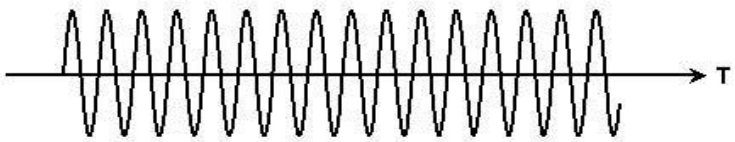
Több hangszóró is szükséges a hangfalon

- **Lebegés:** egymáskoz közeli frekvenciájú hullámok találkozásakor

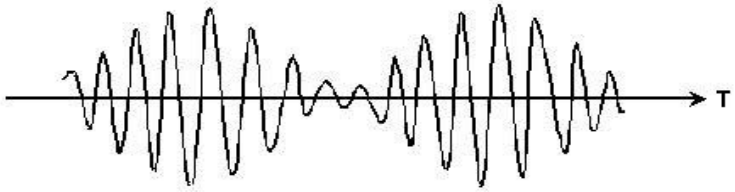
  Példa: hang



10 Hz



12 Hz



2 Hz

→ Zenészek lebegéssel hangolnak

A lebegés jelensége is könnyen leírható matematikailag:

$$\sin\omega_1 t+\sin\omega_2 t=$$

$$=2\sin\frac{\omega_1 t}{2}\cos\frac{\omega_1 t}{2}\left[\sin^2\frac{\omega_2 t}{2}+\cos^2\frac{\omega_2 t}{2}\right]+$$

$$+2\sin\frac{\omega_2 t}{2}\cos\frac{\omega_2 t}{2}\left[\sin^2\frac{\omega_1 t}{2}+\cos^2\frac{\omega_1 t}{2}\right]=$$

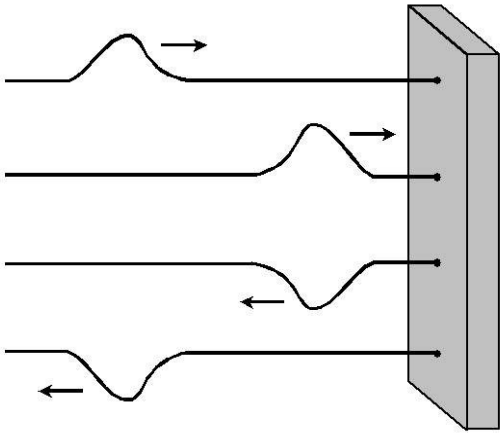
$$=\left[2\sin\frac{\omega_1 t}{2}\cos\frac{\omega_2 t}{2}+2\sin\frac{\omega_2 t}{2}\cos\frac{\omega_1 t}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\frac{\omega_1 t}{2}\cos\frac{\omega_2 t}{2}+\sin\frac{\omega_2 t}{2}\sin\frac{\omega_1 t}{2}\right]=$$

$$=2\sin\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cdot\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}$$

Tehát a hullám amplitódója ω_1 – ω_2 körfrekvenciával fog váltakozni.

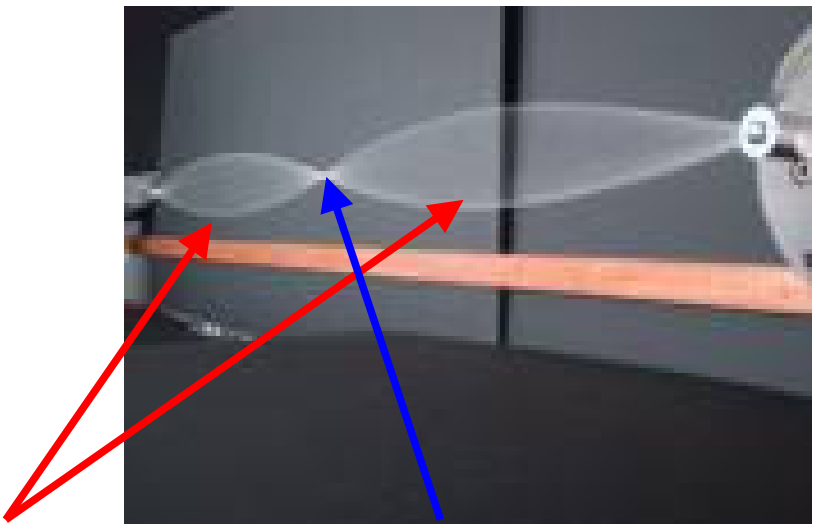
Állóhullámok: két hullám halad át ugyanott mindig azonos fáziskülönbséggel



A hullám visszaverődik *ellenkező* fázisban

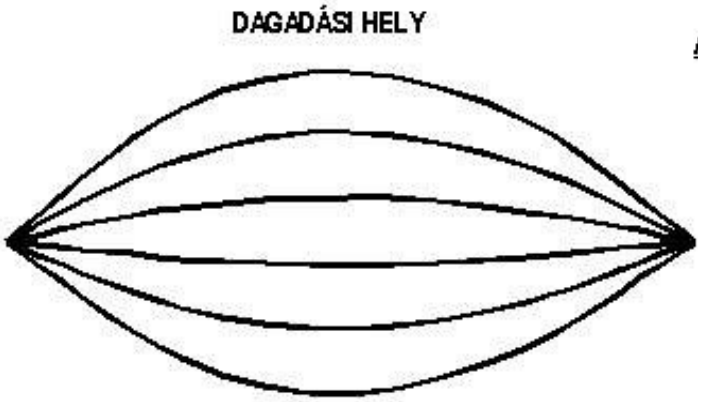
A két végén rögzített húron azok a hullámok erősítik egymást, amelyekre a húr hossza a λ/2 egész számú többszöröse (a többi kioltódik): állóhullámok alakulnak ki.

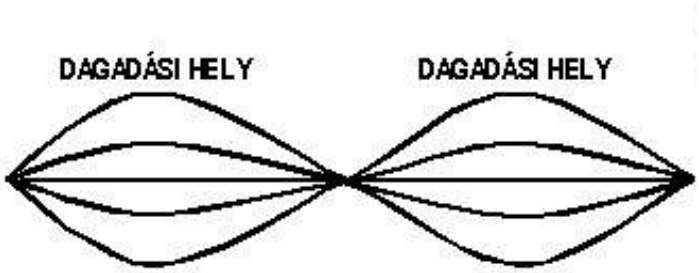
$$\left(\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow L = n \cdot \frac{\lambda}{2}\right)$$



dagadási hely **nódus**

A húron megjelenhetnek az alapfrekvencia többszörösei (felharmónikusok):





$$f_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L} \rightarrow n = 1,2,3...$$

Ahol *v* a hullám terjedési sebessége a húron.

Hangszerek: állóhullámok alakulnak ki → ez a kiadott hang

Húros hangszerek: húrok rezgése (hegedű, zongora, gitár stb.)

Példa: gitár

Adatok (tipikus eset):

ρ = m/L = 5,3 g/m; F = 227 N, L = 62,8 cm.

Ebből a terjedési sebesség:

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{F}{m/L}} = 207\,\frac{m}{s}$$

Alapfrekcencia:

f = 164,8 Hz (E hang)

Egy oktávval feljebb: 31,4 cm-re kell lefogni a húrt a hídtól,

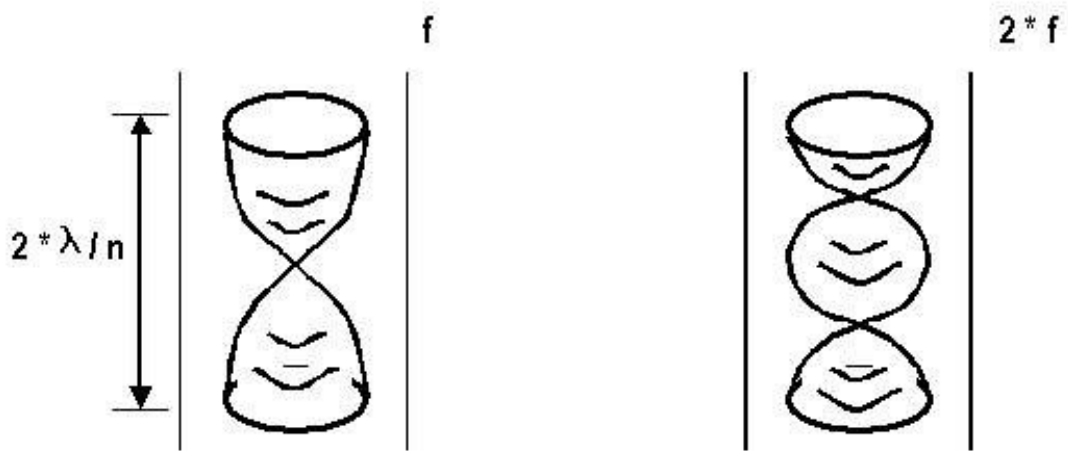
még egy oktávval feljebb: 15,7 cm a hídtól

(egy oktáv különbség = kétszeres frekvencia)

Longitudinális állóhullámok

Fúvós hangszerek: rezgő hangoszlopok (furulya, orgona, trombita, tárogató stb.)

Példa: hanghullám (nyomáshullám) csőben – nyitott vég: dagadóhely. Az elmozdulások (kitérések):



alaphang, λ/2

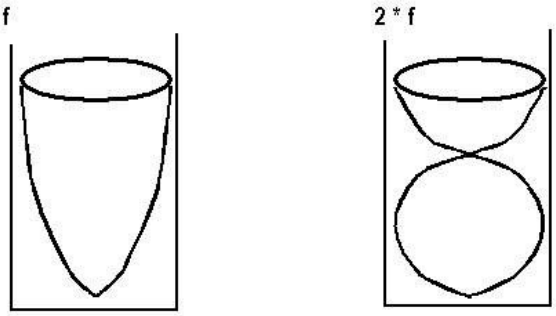
A síp hossza a félhullámhossz többszöröse lehet:

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}; f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L} \rightarrow n = 1,2,3...$$

Itt *v* a hangsebesség a levegőben → hőmérsékletfüggő → hangolni kell

– **zárt vég:** nincs rezgés a zárt végnél:

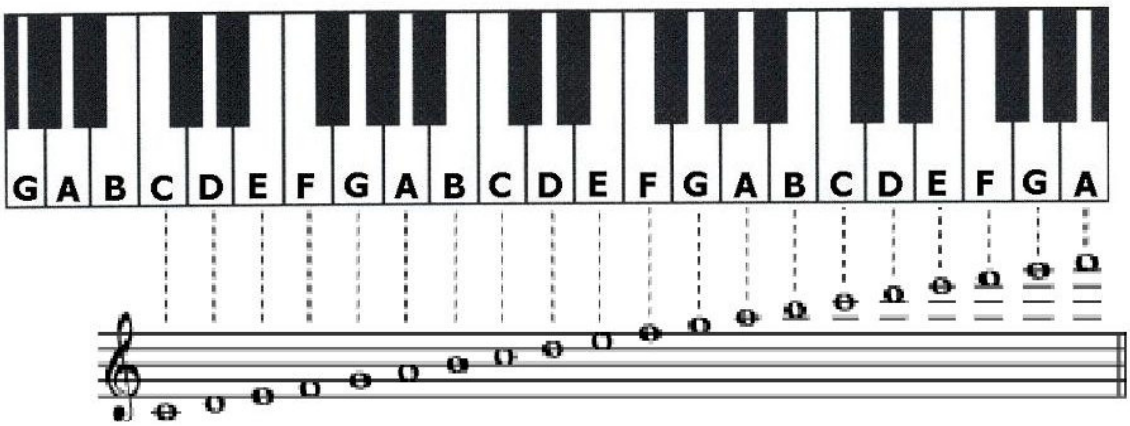


frekvencia: **fele** a nyitott végűnek

Milyen hangokat érzünk harmonikusnak és milyeneket disszonánsnak?

Püthagorasz, Kr. e. VI. szd.: harmonikus hangok a húron: hosszarányok 2:1, 3:2, 4:3 → a zene „tökéletes arányai”

oktáv (2:1), terc (5:4), kvart (4:3), kvint (3:2)
Hermann von Helmholz (1821-1894, 1877)
→ Disszonancia érzése akkor, amikor a két hang 30-40 Hz lebegést ad ki,
→ ha ettől távol: harmonikus



A természetes hangskála frekvencia-arányai a kis egész számok hányadosai:
1, 16/15, 9/8, 6/5, 5/4, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 5/3, 7/4, 15/8, 2.
Probléma: sok a disszonáns pár is köztük, pl. 7/5·7/5 = 49/25 = 1,96 és 2 között.
Megoldás:
Temperált hangskála (XVI. sz.):
$1, 2^{1/12}, 2^{2/12}, 2^{3/12}, 2^{4/12}, 2^{5/12}, \ldots, 2.$

Zene → tudomány, amelynek alapjai a fizikában vannak

III. HŐTAN

1. A HŐMÉRSÉKLET ÉS A HŐ

Látni fogjuk: a mechanika fogalmai jelennek meg mikroszkópikus szinten

1.1. A hőmérséklet

Mindennapi általános tapasztalatunk van.

Termikus egyensúly **⇔ a résztvevők** ***hőmérséklete*** **azonos** (nulladik főtétel)**.**

Hőmérsékleti skálák:

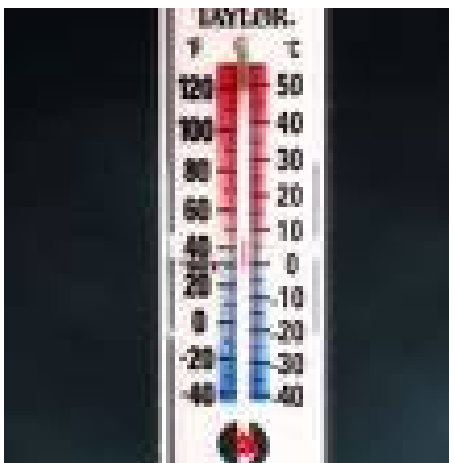
- **Celsius skála**
  [Anders CELSIUS, 1701-44, 1742]
- **Fahrenheit skála [1714]**
  [Daniel FAHRENHEIT, 1686-1736, 1709]

(0°F: Gdansk legkeményebb tele
100°F: D.F. testhőmérséklete)

Celsius		Fahrenheit
100 °C	– víz forrása –	212 °F
0 °C	– víz olvadása –	32 °F

→ $T^F = 9/5 \cdot T^C + 32$

°C → Európa, Ázsia, Afrika
°F → USA, angol nyelvterület

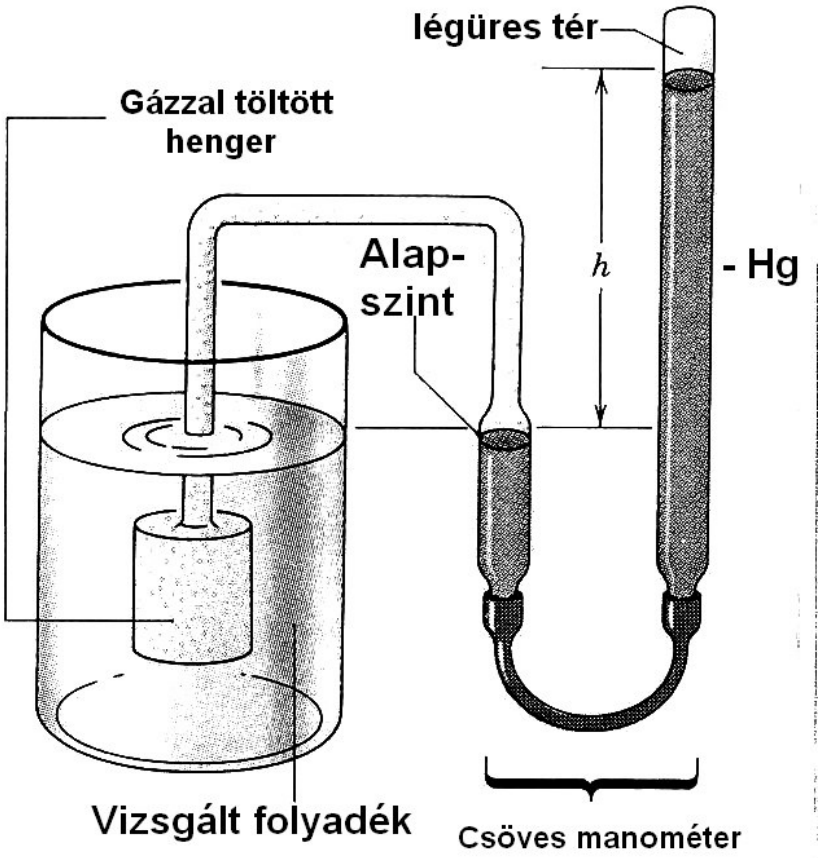


Példák:

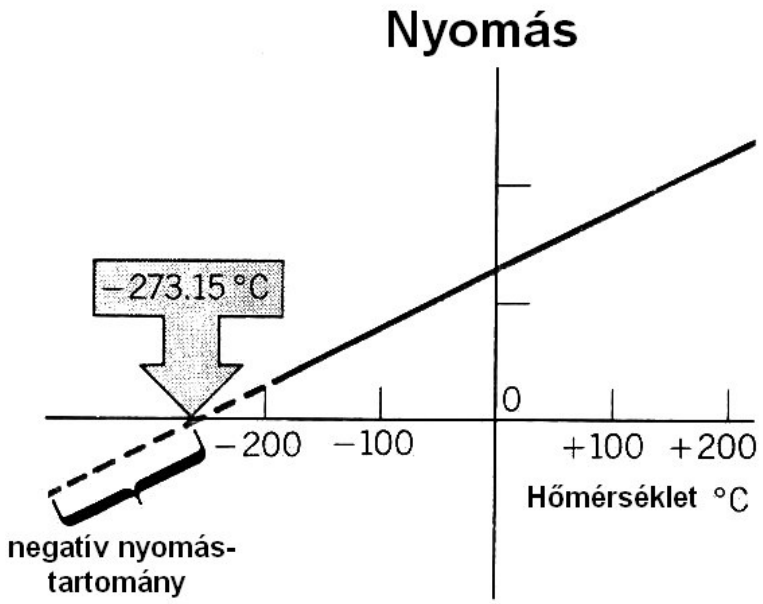
37 °C (láz) = 98,6 °F
–40 °C = –40 °F
20 °C = 68 °F

- **Az abszolút hőmérsékleti skála**

Állandó térfogatú gáz nyomása az adott hőmérsékleten (gázhőmérséklet)



Eredmény: bármilyen gázra ugyanaz!



→ – 273,15 °C alatt a nyomás negatív lenne

Kelvin–féle abszolút hőmérsékleti skála

[W. THOMSON, (KELVIN) 1824-1907, 1851]

Abszolút zérus fok: – 273,15 °C = 0 K

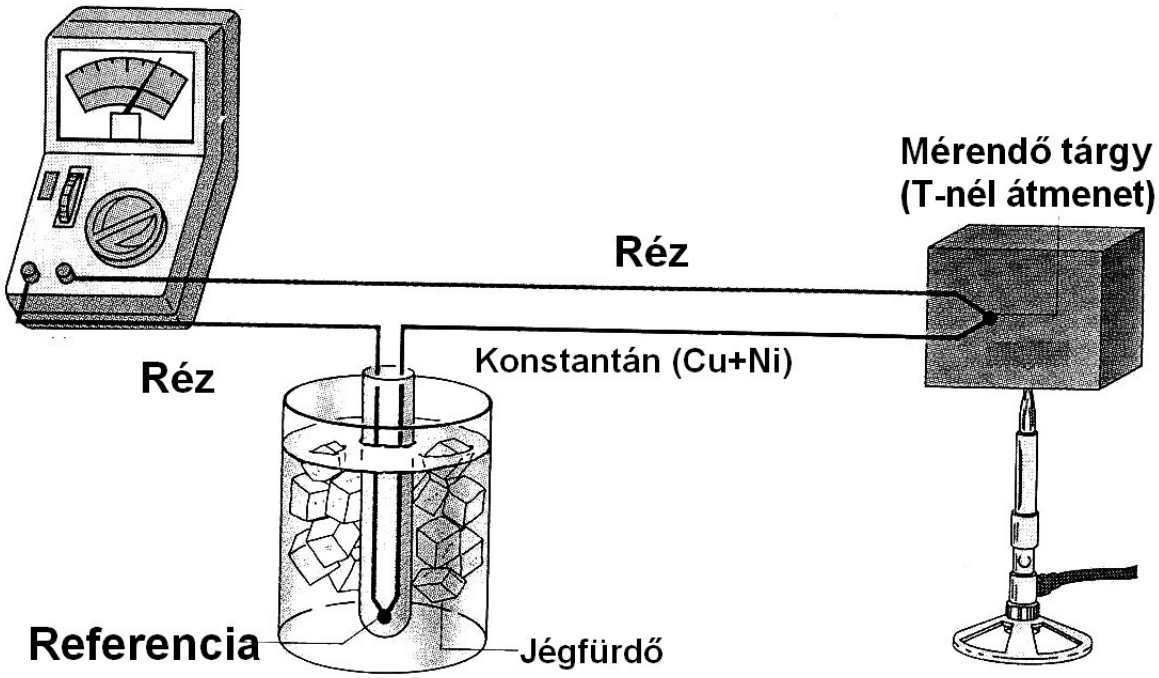
– Átszámítás: T (K) = T (°C) + 273,15

1.2. Hőmérők

Alap: a hőmérséklet változásával más tulajdonságok is változnak (pl. térfogat)

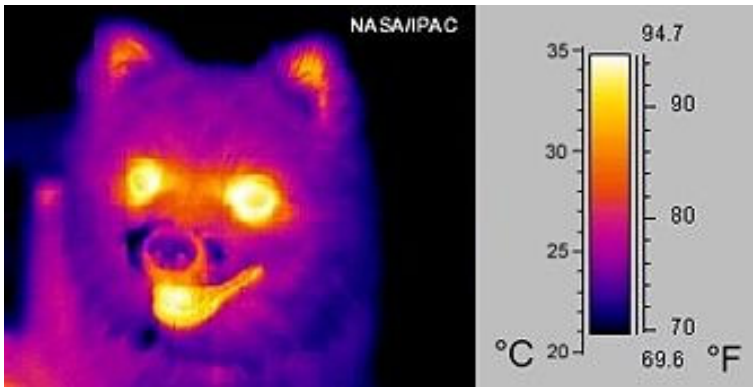
- Higanyos (Hg oszlop hossza)
- Állandó térfogatú gáz nyomása (precíz)
- Termopár: különböző fémek összeforrasztási helyei között ΔT-re elektromos feszültség alakul ki

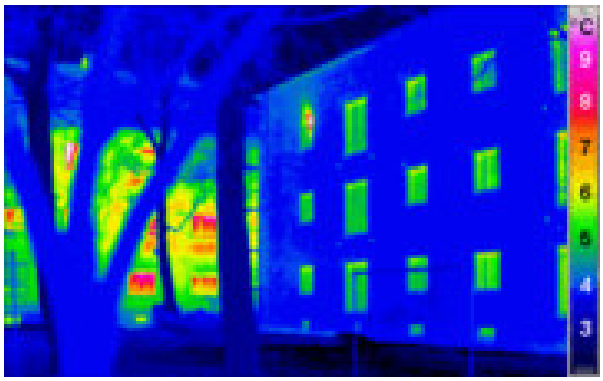
Méréstartomány: –270-től 2300 °C -ig



- **Ellenálláshőmérő** (általában platina): az elektromos ellenállása változik
  → **–270-től 700 °C –ig**

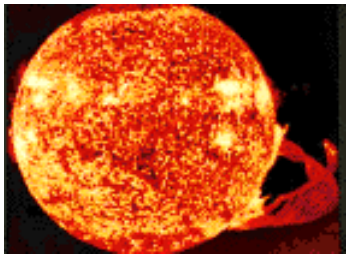
- **Termográfok:** kisugárzott **infravörös** intenzitás alapján
  (Kamera veszi, számítógépi megjelenítés)
  Példák:
  - emberi **hőtérkép**,
  - **épületek** hőtérképe,
  - távvezetékek javítása
  - **űrmegfigyelések**.

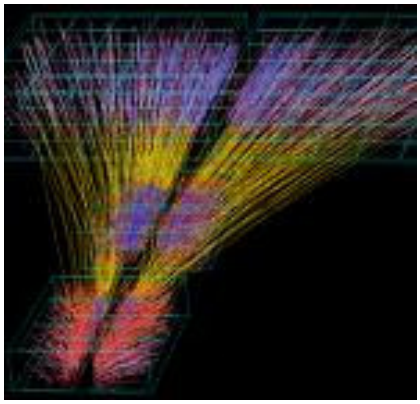




Példák hőmérsékletekre:

Jelenség	T (K)
He forráspontja	4,2
H_2 forráspontja	20
N_2 forráspontja	77
víz olvadáspontja	273
ember	310
víz forráspont	373
ólom olvadáspont	600
arany olvadáspont	1336
Nap felszíne	6000
Föld magja	6000
Nap középpontja	10^7
forró csillag magja	10^9
nehézion-ütközés	10^{12}





1.3 Hőtágulás

Hőmérsékletváltozás hatására az anyagok kiterjedése (hossza, térfogata) megváltozik.

- **Lineáris hőtágulás**

  Hőmérsékletváltozásra: hosszváltozás

  $\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$

  $\alpha \rightarrow$ lineáris hőtágulási együttható $[1/C^o]$

- **Térfogati hőtágulás**

  $\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T$

  β térfogati hőtágulási együttható $[1/C^o]$

  Három dimenziós világunkban: $\beta = 3 \cdot \alpha$

Példák:

- kvarc felhasználása (α nagyon kicsi),
- vasúti sínek meggörbülése melegben,
- távvezeték-kábelek belógása nyáron
- híd dilatációk, fésű a hídfeljárónál
- higanyos hőmérők.

Anyagok hőtágulási együtthatói:

Szilárd (≈ 20 °C)	α (1/C°)	β (1/C°)
Al	$23 \cdot 10^{-6}$	$69 \cdot 10^{-6}$
beton	$12 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-6}$
Cu	$17 \cdot 10^{-6}$	$51 \cdot 10^{-6}$
üveg	$8{,}5 \cdot 10^{-6}$	$26 \cdot 10^{-6}$
Au	$14 \cdot 10^{-6}$	$42 \cdot 10^{-6}$
vas, acél	$12 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-6}$
Pb	$29 \cdot 10^{-6}$	$87 \cdot 10^{-6}$
Ni	$13 \cdot 10^{-6}$	$39 \cdot 10^{-6}$
kvarc	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$
sárgaréz, Ag	$19 \cdot 10^{-6}$	$57 \cdot 10^{-6}$
Folyadék (≈ 20 °C)		
szén-tetraklorid		$1240 \cdot 10^{-6}$
etil-alkohol		$1120 \cdot 10^{-6}$
benzin		$950 \cdot 10^{-6}$
Hg		$182 \cdot 10^{-6}$
metil-alkohol		$1200 \cdot 10^{-6}$
víz		$207 \cdot 10^{-6}$

Megjegyzés: °C a hőmérséklet, C° pedig a hőmérsékletváltozás (intervallum, különbség) mértékegységének jele.

Termikus feszültség

→ óriási erők léphetnek fel, ha megakadályozzuk a hőtágulást.

Példa: acélra $Y=2\cdot10^{11}$ N/m^2 (Young-modulus)

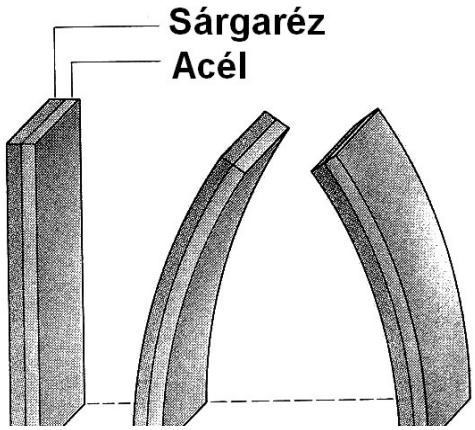
$F = Y\cdot(\Delta L/L_0)\cdot A$ → feszítőerő *A* keresztmetszetnél.

→ $F/A = Y\cdot\Delta L/L_0 = Y\cdot\alpha\cdot L_0\cdot\Delta T/L_0 = Y\cdot\alpha\cdot\Delta T$

Pl. ha A ≈ 0,1 m^2 , ΔT ≈ 20 C^o → $F \approx 5\cdot10^6$ N.

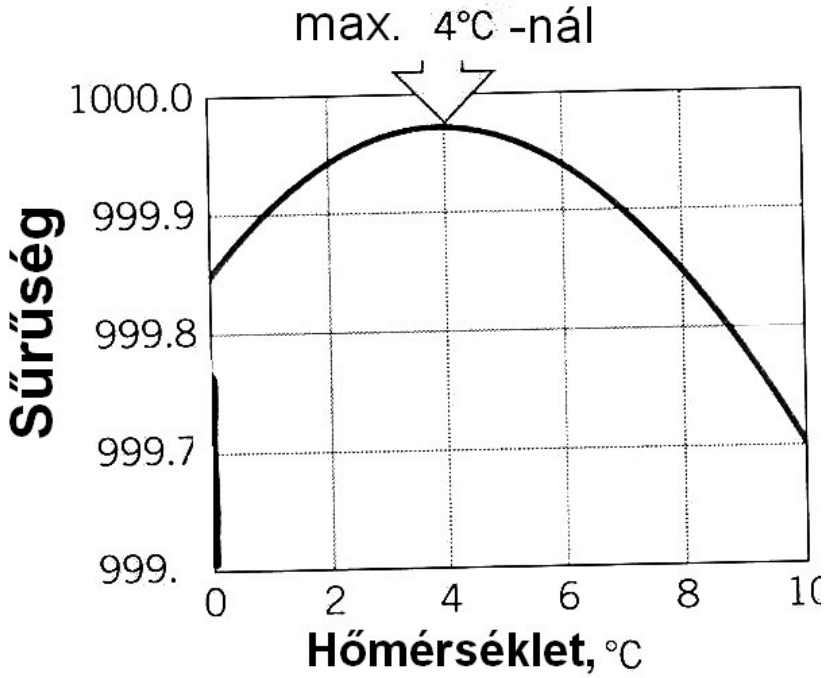
jelenségek: jégkocka megrepedezik meleg vízbe dobva, gleccser ropogása,...

- **Bimetál, hőérzékeny kapcsolók, termosztátok**



A víz sűrűségének hőmérsékletfüggése

Víz anomáliája: környezeti következmény: gázcsere élővízben, vizek alja fagy be utoljára



1.4. A hő

→ A hő energia, amely a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé áramlik,

→ A kapott hő a rendszer belső energiáját növelheti, amely a belső részecskék kinetikus (mozgási) energiájának összege.

hőmérséklet nő → nő a belső energia

Egysége: J (Joule)

Egyéb egységei:

1 cal =4,186 J → 1 J = 0,239 cal

1 kcal =4186 J

1 BTU = 1055 J (British Thermal Unit)

- **Testek hőmérsékletváltozása, fajhője**

ΔT hőmérsékletváltozáshoz szükséget hő:

$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$;

c → fajlagos hő (fajhő); egysége: $J/(kg \cdot C^o)$

1 cal az a hő, melynél 1 g víz 1 C^o-t melegszik.

1 BTU az a hő, melynél 1 font (454 g) víz 1 F^o-t melegszik.

[*J. JOULE, 1818-1889*, hő és a mechanikai energia egyenértékűsége]

Anyagok fajhője, J/(kg·C°) és kcal/(kg·C°)

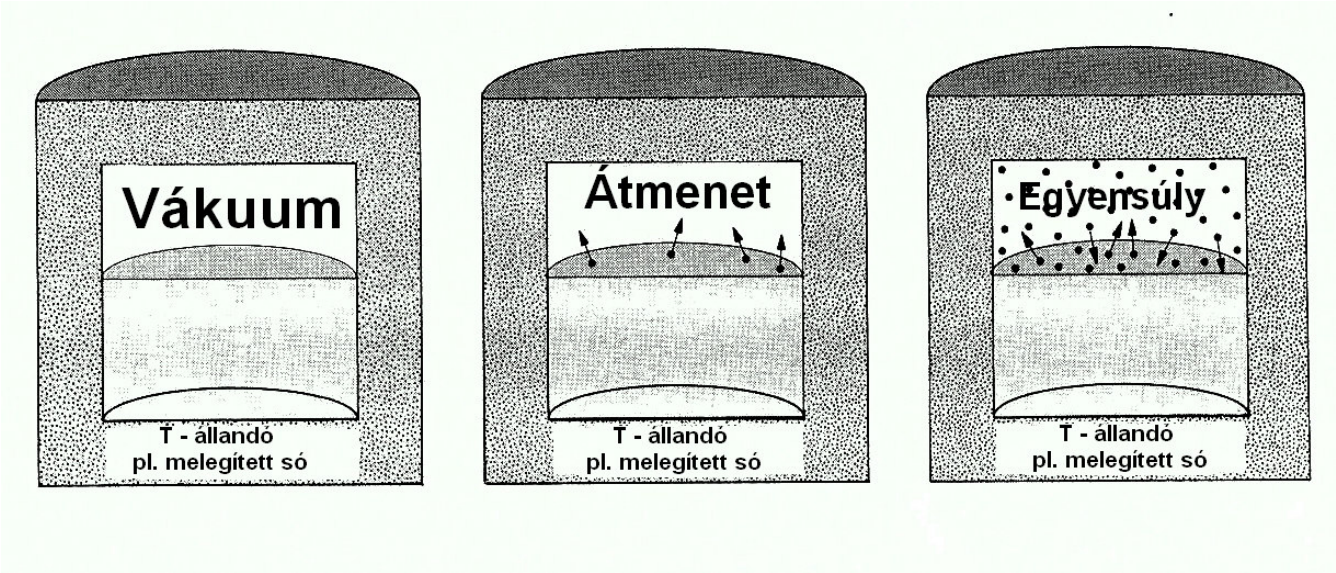
Szilárd (~ 25 °C)	*J/kg/C°*	*kcal/kg/C°*
Al	900	0,215
Cu	387	0,0924
üveg	840	0,2
ember (37°C)	3500	0,83
jég (– 15 °C)	2000	0,478
vas, acél	452	0,108
Pb	128	0,0305
Ag	235	0,0562
Folyadék		
benzol	1740	0,415
etil alkohol	2450	0,586
glicerin	2410	0,576
Hg	139	0,0333
víz (15 °C)	4186	1,000
Gáz (p, V függő)	C_p	C_v
1 atm., 15 °C	*J/kg/°C*	*J/kg/°C*
ammónia	2190	1670
CO_2	833	638
N_2	1040	739
O_2	912	651

Figyelem: az elemi szilárd anyagok mólhője majdnem pontosan megegyezik! (Dulong-Petit)

1.5. Fázisok közötti egyensúly

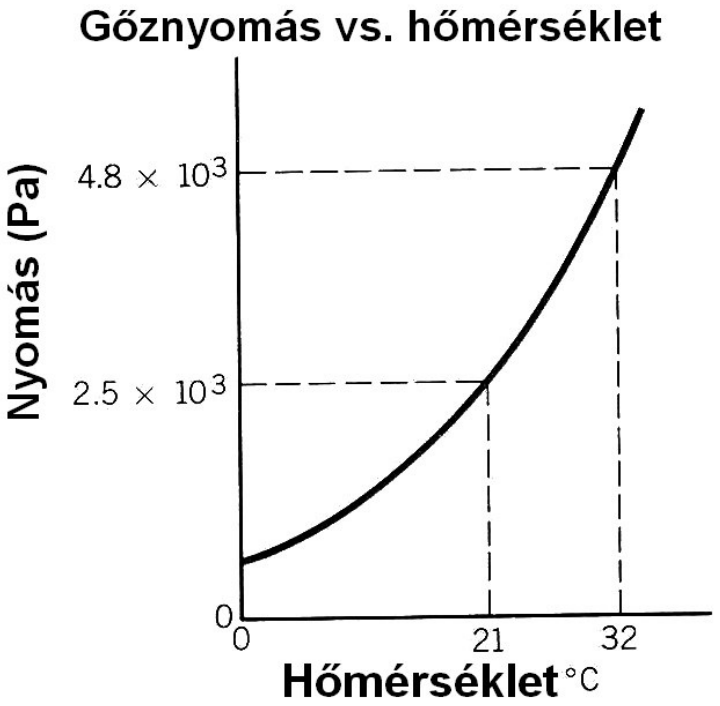
a) Gőz-folyadék átmenet

A folyadék fölötti vákuum benépesül a folyadék gőzével.



Gőznyomás: függ a hőmérséklettől

Példa: spray-dobozok működése

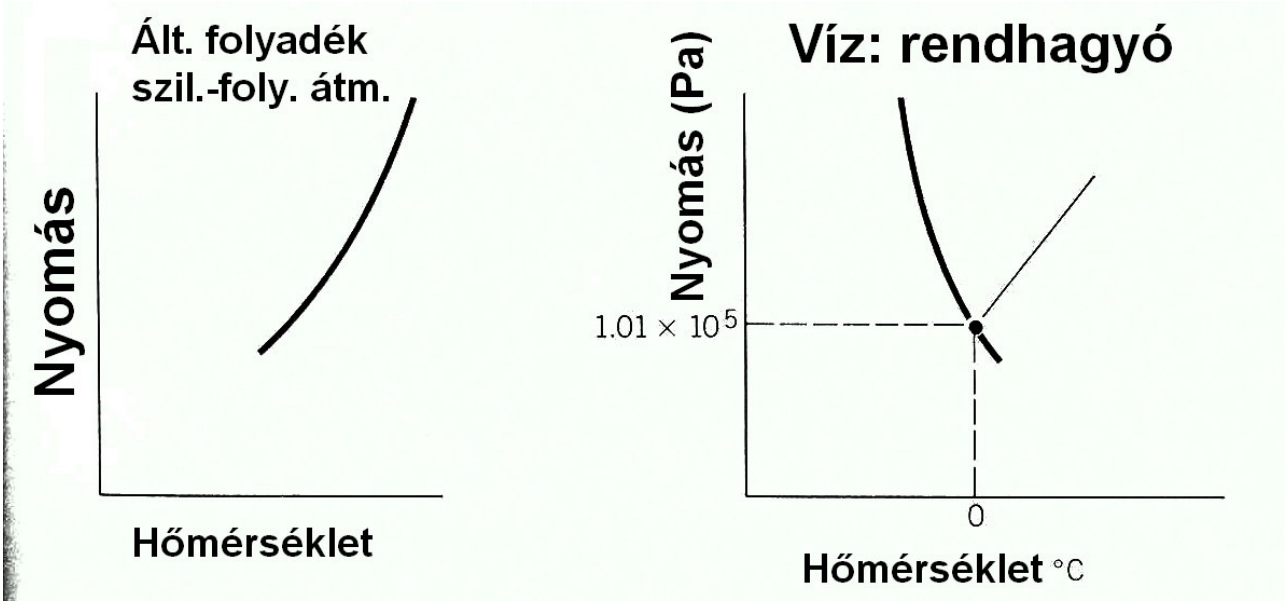


b) Szilárd-folyadék átmenet

Meghatározott nyomásnál és hőmérsékletnél történik (olvadáspont: az olvadás hőmérséklete).

Általában a nyomás növelésével egyre nagyobb hőmérsékleten olvad az anyag.

A víz esetén fordítva van: nyomás alatt csökken az olvadáspont!



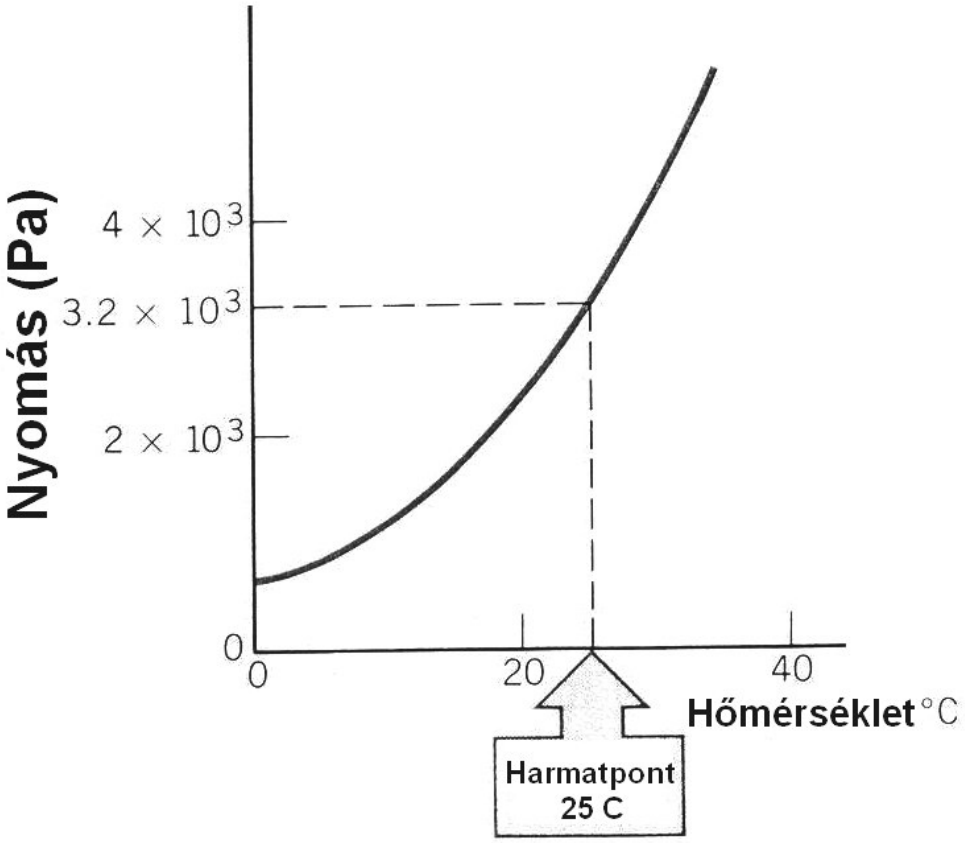
Példák:

- **jégkorcsolya**
- **curling**
- **jégkocka-kísérlet**

1.6. Páratartalom (humiditás)

relatív páratartalom (%) =
= (vízgőz parciális nyomása) / (egyensúlyi gőznyomás az adott hőmérsékleten)

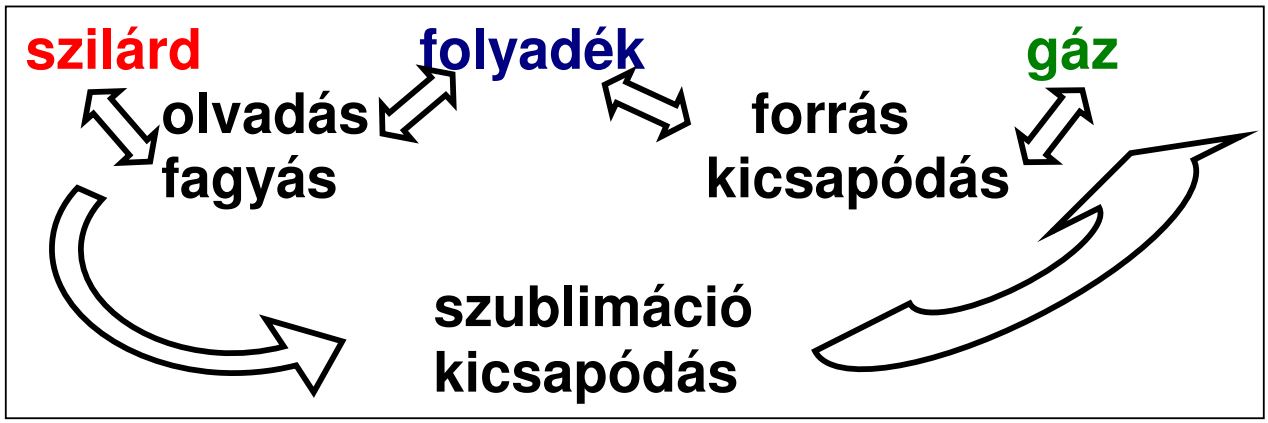
teljes nyomás = ∑ parciális nyomások
parciális nyomás → az adott gázkomponens nyomása lenne, ha csak az a komponens lenne a térfogatban (pl. CO_2, N_2, O_2, H_2O)



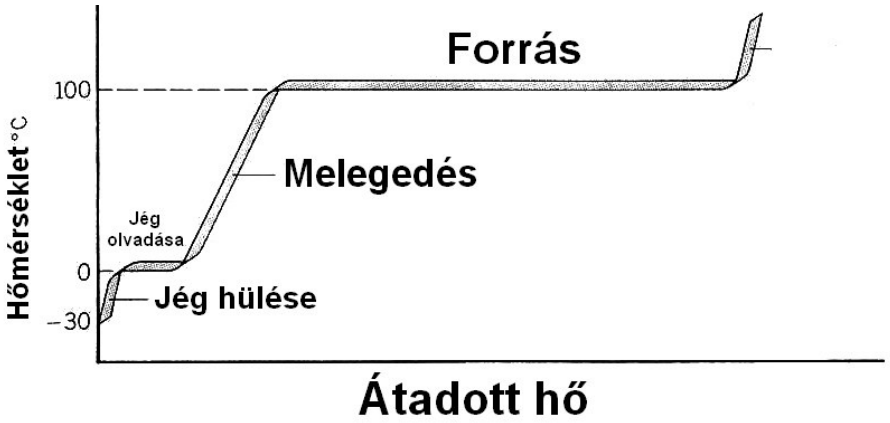
Harmatpont:
az a T,
melynél a gőz nyomása az egyensúlyi parciális nyomással egyezik

Példa: – ködképződés, harmat, dér
– párátlanító működése (lecsapódás)

1.7. Fázisátalakulások



Példa: víz



Latens hő: forráshő, olvadáshő → [J/kg]

Anyag	$T_{olv.}$ °C	Q_{olv} J/kg	$T_{forr.}$ °C	Q_F J/kg
ammónia	–77,8	$33{,}2 \cdot 10^4$	–33,4	$13{,}7 \cdot 10^5$
Cu	1083	$20{,}7 \cdot 10^4$	2566	$47{,}3 \cdot 10^5$
etil-alk.	–114,4	$10{,}8 \cdot 10^4$	78,3	$8{,}55 \cdot 10^5$
Au	1063	$6{,}28 \cdot 10^4$	2808	$17{,}2 \cdot 10^5$
Pb	327,3	$2{,}32 \cdot 10^4$	1750	$8{,}59 \cdot 10^5$
Hg	–39,9	$1{,}14 \cdot 10^4$	356,6	$2{,}96 \cdot 10^5$
N_2	–210	$2{,}57 \cdot 10^4$	–195.8	$2{,}0 \cdot 10^5$
O_2	–218,8	$1{,}39 \cdot 10^4$	–183	$2{,}13 \cdot 10^5$
víz	0	$225 \cdot 10^4$	100	$226 \cdot 10^5$

2. A hőátadás formái és törvényei

2. A hőátadás formái

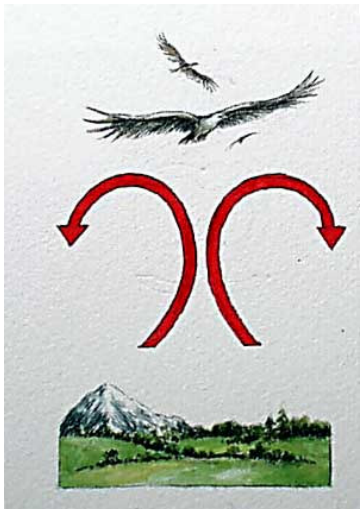
Tapasztalat: – tűz, füst,
– meleg edény füle,
– napozás.

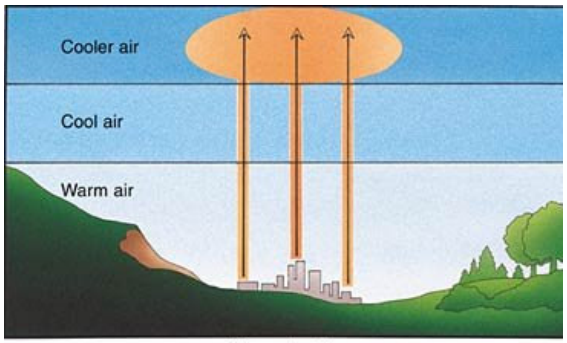
2.1. Hőáramlás (konvekció)

→ olyan folyamat, amelynek során a hő a *hordozóközeg áramlásával* kerül egyik helyről a másikra

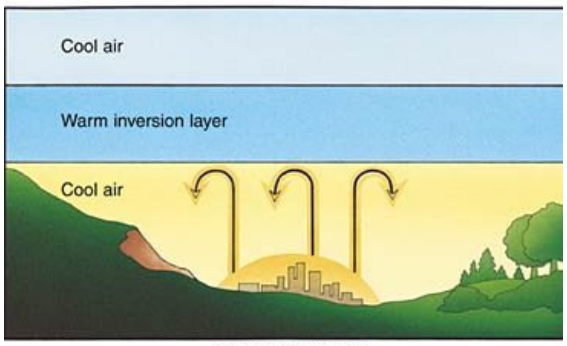
Példák:

- vízmelegítés áramoltatással (cirkófűtés)
- fűtőtestek elhelyezése
- hűtőbordák, hűtőtornyok, erőművek
- termikus áramlások felfelé
- termikus inverzió a légkörben (szmog)
- mesterséges áramlás: PC hűtése, kémény
- autómotor hűtése





Normal pattern



Thermal inversion

2.2. Hővezetés

→ **olyan hőátadás, amelyben a hő az anyagban terjed *anyagáramlás nélkül***

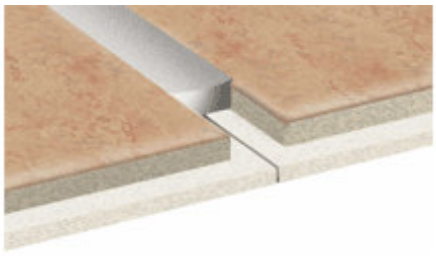
Egy A keresztmetszetű, L hosszúságú rúdban a hőáram, ha a végeit T_1 és T_2 hőmérsékleten tartjuk:

$$\Delta Q/\Delta t = k \cdot A \cdot (T_1 - T_2)/L$$

k: hővezetési együttható, egysége: J/(K·m·s).
(Pl. tégla: 0,1-0,6; üveg, beton: 0,8; réz: 385; levegő: 0,024; kőzetgyapot: 0,04)

Példák:

- **testi zsír hőszigetelő szerepe**
- **habok hőszigetelő képessége**
- **eljegesedett hűtő (fagyasztó)**
- **házak hőszigetelése**
- **a fémek „hűvös” tapintásúak**



2.3. Hősugárzás

→ olyan folyamat, amelyben a **hő** ***elektromágneses sugárzás*** **útján terjed**

→ **minden test folyamatosan sugároz; a sugárzás hullámhossza függ a hőmérséklettől. Ember: λ=10 μm, P=100 W. Vákuumban is lehetséges, pl. Nap melege.**

$\Delta Q/\Delta t \sim T^4$

Példák:

- **vörösizzás (vaskályha, kohó, parázs)**
- **fehérizzás: izzószál lámpában**
- **inkubátor: hideg falak veszélyesek**
- **mentőfólia (hegymászás)**
- **termosz fényes belseje**

- **Hőátadás: a kisugárzás (emisszió) és az elnyelés (abszorpció) különbsége**

- **Abszorpció: felülettől függ** (óceán, jég,...) **ezüstös, fehér: visszaver, fekete: elnyel.**

→ **Tökéletesen fekete test: mindent elnyel. Jó megvalósítása: doboz egy kis lyukkal**

- **Test hőmérsékleti egyensúlyban: annyit sugároz ki, mint amennyit abszorbeál.**

3. Az anyag termikus tulajdonságai

Nyomás (p), térfogat (V), hőmérséklet (T), anyagmennyiség (n): ezek *makroszkópikus* fogalmak, de a *részecskék* szintjén is tárgyalhatók.

Intenzív mennyiségek: ezek nem függenek attól, hogy mekkora anyagmennyiségű mintán mérjük: T,p,olvadáspont, forráspont, viszkozitás, sűrűség stb.

Extenzív mennyiségek: függnek a rendszer anyagmennyiségétől (arányosak vele): tömeg, hossz, térfogat, entrópia, energia...

A közöttük levő összefüggés neve: állapotegyenlet.

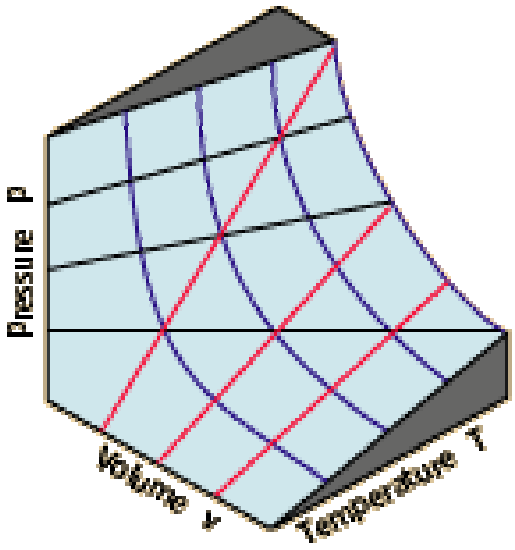
Ideális (nem kölcsönható) gáz esetén:

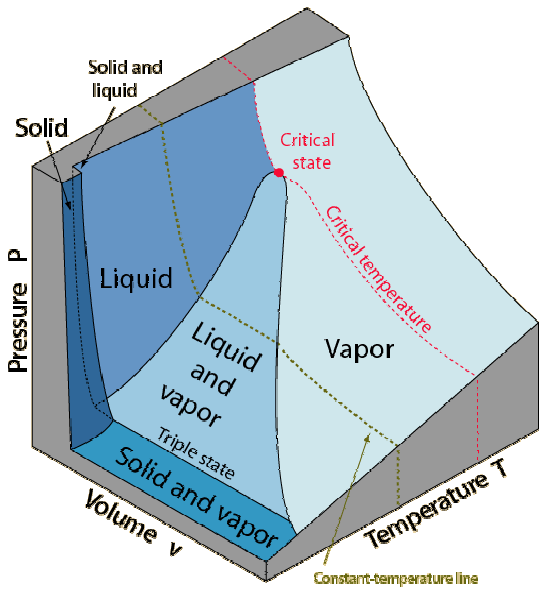
$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$ **(R = 8,3 J/(mol·K): gázállandó)**

Adott mennyiségű gázra: $p \cdot V/T$ = állandó.

A nyomás és térfogat közötti összefüggést p-V vagy p-V-T diagramon szemléltetjük:

ideális gázra: **reális anyagra:**





Nyomás.

Mikroszkópikusan a nyomás a gáz részecskéinek ütközésével és az edény faláról való visszapattanásával kapcsolatos.

Az impulzusváltozásból levezethető, hogy N atomból álló egyatomos gázra:

$$p \cdot V = 2/3 \cdot N \cdot (1/2 \cdot m \cdot \langle v^2 \rangle)$$

tehát az átlagos mogzási energia:

$$1/2 \cdot m \cdot \langle v^2 \rangle = 3/2 \cdot k \cdot T$$

, ahol

$k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ **J/K a Boltzmann-állandó.**

Az átlagos sebesség (RMS):

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}$$

Emiatt nincs pl. jelentős mennyiségű H_2 a légkörben (elszökne a gravitációs térből).

Mólhő: a fentiek miatt $c_V = 3/2 \cdot R$.

Ekvipartíció tétele: minden szabadsági fokra $1/2 \cdot k \cdot T$ átlagos kinetikus energia jut.

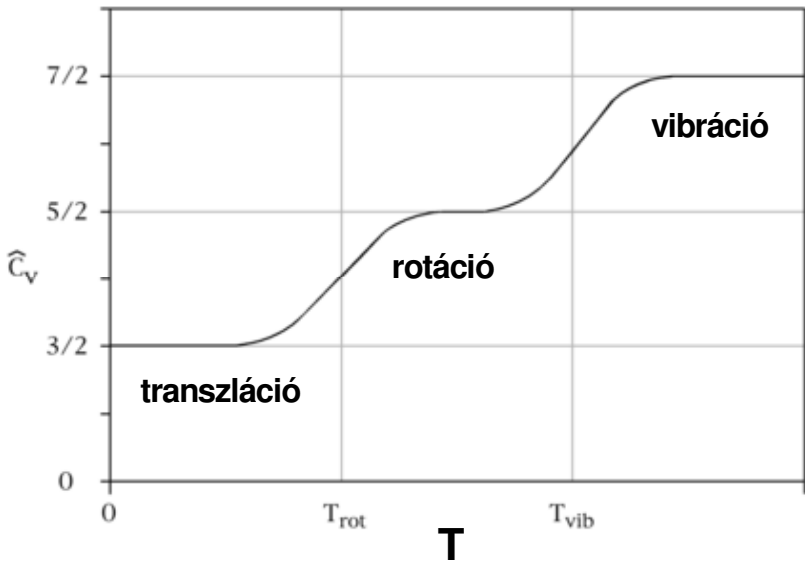
Szabadsági fokok száma:

- **egyatomos gáz: 3,**
- **kétatomos: 5,**
- **sokatomos: 6.**

Gázmolekulák mozgásformái:

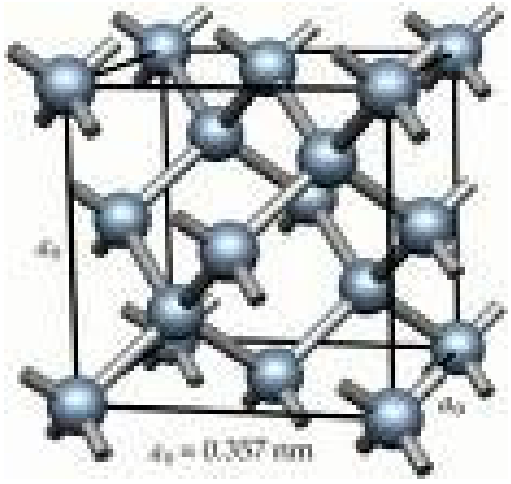
- **haladó mozgás (transzláció)**
- **forgó mozgás (rotáció)**
- **rezgés (vibráció) – általában „kifagy”: csak nagy hőmérsékleten számít** (kvantummechanikai oka van)

A gázok mólhője tehát a szabadsági fokok számával arányos. Kétatomos gázra (pl. N_2) →



Szilárd anyagok esetén: kristályrácsbeli kölcsönhatás miatt potenciális energia is van: erre is igaz az ekvipartíció tétele. Ezért szilárd anyagokban a mólhő:

$$c \approx 2 \cdot 3/2R = 3 \cdot R$$ **(Dulong-Petit szabály).**

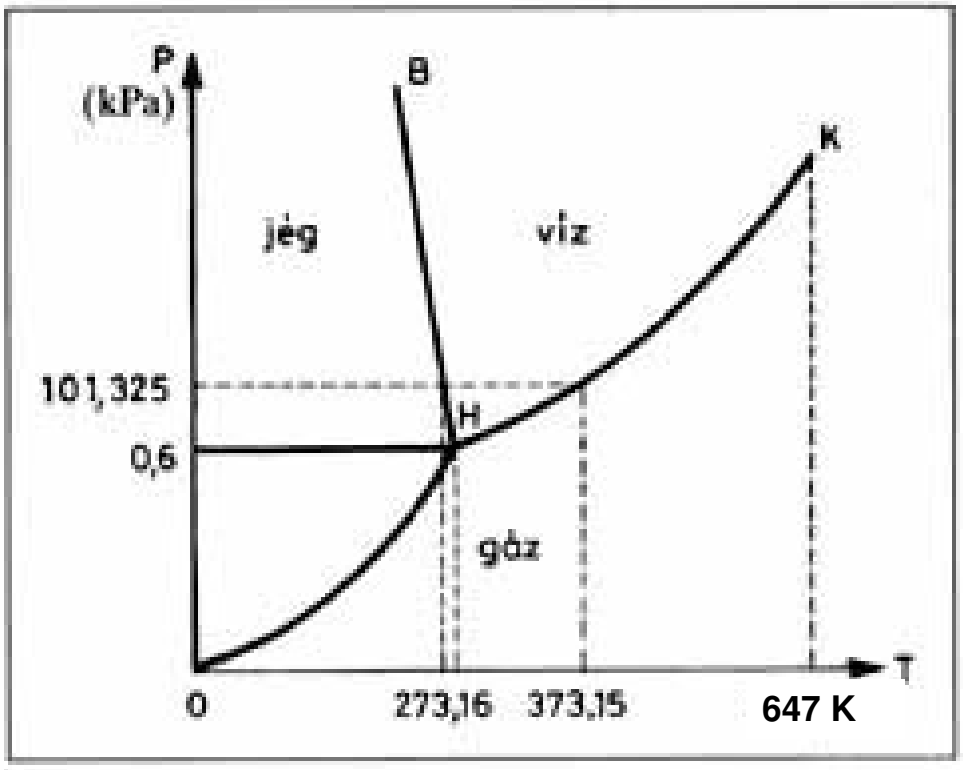


Fázisdiagram. Az anyag fázisait a hőmérséklet-nyomás diagramon szemléltetjük.

Hármaspont: mindhárom fázis egyszerre van jelen. Ez alatti nyomáson: nincs folyadék állapot, csak szilárd és gáz.

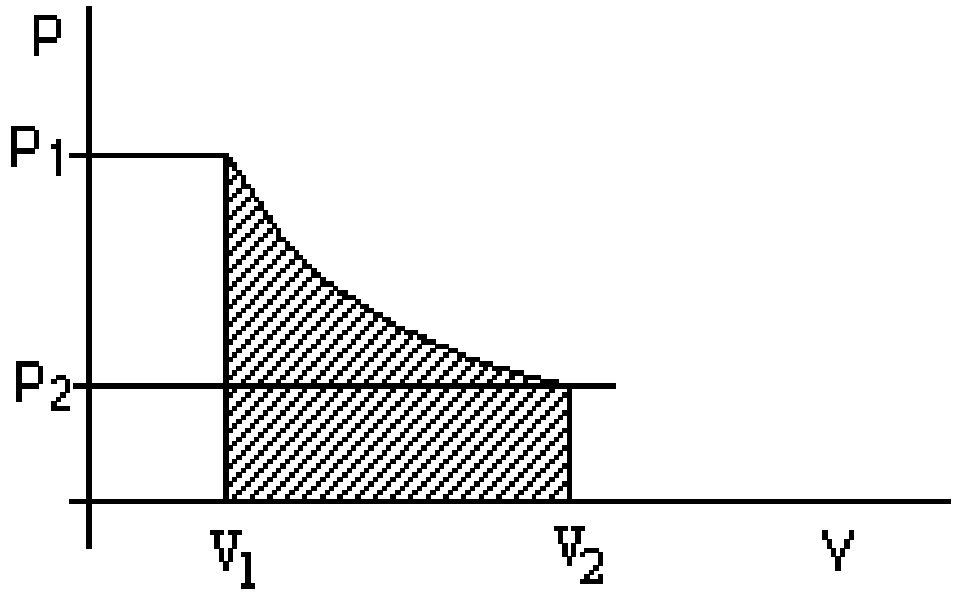
Kritikus pont: e fölötti nyomáson vagy hőmérsékleten nincs víz-gőz átmenet: folytonos sűrűségváltozás van.

Víznél látható az is, hogy az olvadáspont csökken, ha a nyomás nő.



4. A termodinamika I. főtétele

A gáz által végzett munkát egy folyamatban a $F \cdot \Delta x = p \cdot A \cdot \Delta x = p \cdot \Delta V$ elemi munkavégzések összegeként kapjuk: ez a p-V diagramon a görbe alatti terület:



Két állapot, azaz két (p,V) koordináta-párral jellemzett pont közötti útvonaltól függ:

- **a gáz által végzett W munka és a**
- **a gázzal közölt hő is.** (pl. szabad tágulás)

Ezek tehát nem alkalmasak az állapot jellemzésére.

Belső energia: a rendszer összes mozgási és potenciális energiájának összege.

I. főtétel: $\Delta U = Q - W$

A rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a rendszernek átadott hő és a rendszeren végzett munka összegével.

Előjelek (!):

$Q>0$ ha a rendszernek adunk át hőt

$Q<0$ ha a rendszerből vonunk ki hőt

$W>0$ ha a rendszer végez munkát.

$W<0$ ha a rendszeren végzünk munkát.

ΔU már nem függ a két állapotot összekötő útvonaltól (a rendszer előéletétől)! Tehát alkalmas az állapot jellemzésére.

Állapotváltozások fajtái:

- **adiabatikus: $Q = 0$.**
  Nagyon jól hőszigetelt rendszerben, vagy nagyon gyors folyamat esetén.
- **izochor: V = állandó, $W = 0$.**
  Nincs térfogatváltozás és munkavégzés. Pl. gázhőmérő.
- **izobár: p = állandó. Ekkor $W = p \cdot \Delta V$.**
- **izoterm: T = állandó.**
  Ideális gáz esetén ekkor $\Delta U=0$, az U belső energia csak T-től függ.

• **Ideális gázra** kiszámítható az izochor és az izobár **mólhő** közötti összefüggés.
Egy izobár állapotváltozásnál:

$$\Delta U = n \cdot c_v \cdot \Delta T$$

$$\Delta Q = n \cdot c_p \cdot \Delta T$$

$$\Delta W = p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$$

Az **I. főtétel** szerint: $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$, ebből:

$$c_p = c_v + R.$$

• **Adiabatikus** folyamatnál kiszámítható a **p és V** közötti összefüggés ideális gázra:

$Q = 0 \rightarrow$ az **I. főtétel** szerint: $\Delta U = -W$

$$n \cdot c_v \cdot \Delta T = -p \cdot \Delta V = -n \cdot R \cdot T \cdot \Delta V / V$$

$$\Delta T/T + R/c_v \cdot (\Delta V/V) = 0$$

legyen $\gamma \equiv c_p/c_v$. Ekkor:

$$\Delta T/T + (\gamma - 1) \cdot \Delta V/V = 0$$

Ezt integrálva:

$$\ln(T) + (\gamma - 1) \cdot \ln(V) = \text{állandó}$$

$$\ln(T \cdot V^{\gamma - 1}) = \text{állandó}$$

$$T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{állandó}$$

Ebből pedig $pV/T = \text{állandó}$ miatt:

$$p \cdot V^{\gamma} = \text{állandó}$$

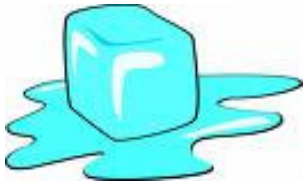
5. A termodinamika II. főtétele

A természetben lejátszódó folyamatok *irányáról* szól. Több megfogalmazása is van:

1) A hő mindig a melegebb testből a hidegebb felé áramlik.

2) A termodinamikai körfolyamatok hatásfoka mindig kisebb, mint 100%: $\eta < 1$

3) A rendszerek állapota külső beavatkozás nélkül a rendezetlenebb (nagyobb entrópiájú) állapot felé változik (pl. hőmérséklet-, nyomás-, és sűrűségkülönbségek kiegyenlítése felé).

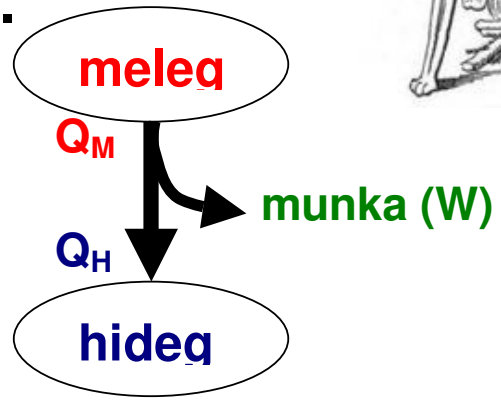


A természetes termodinamikai folyamatok irreverzibilisek (megfordíthatatlanok).

A reverzibilis folyamatok ezek határesetei, amikor kvázi-egyensúlyi állapotokon keresztül történik a változás.

Hőerőgépek:

Melegebb hőtartályból a hidegebb felé áramlik a hő, és részben munkavégzés is történik.

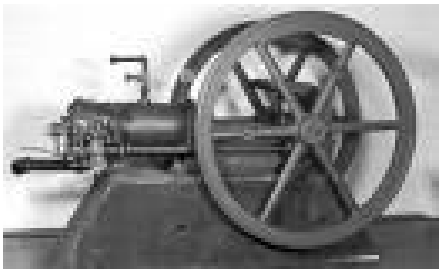


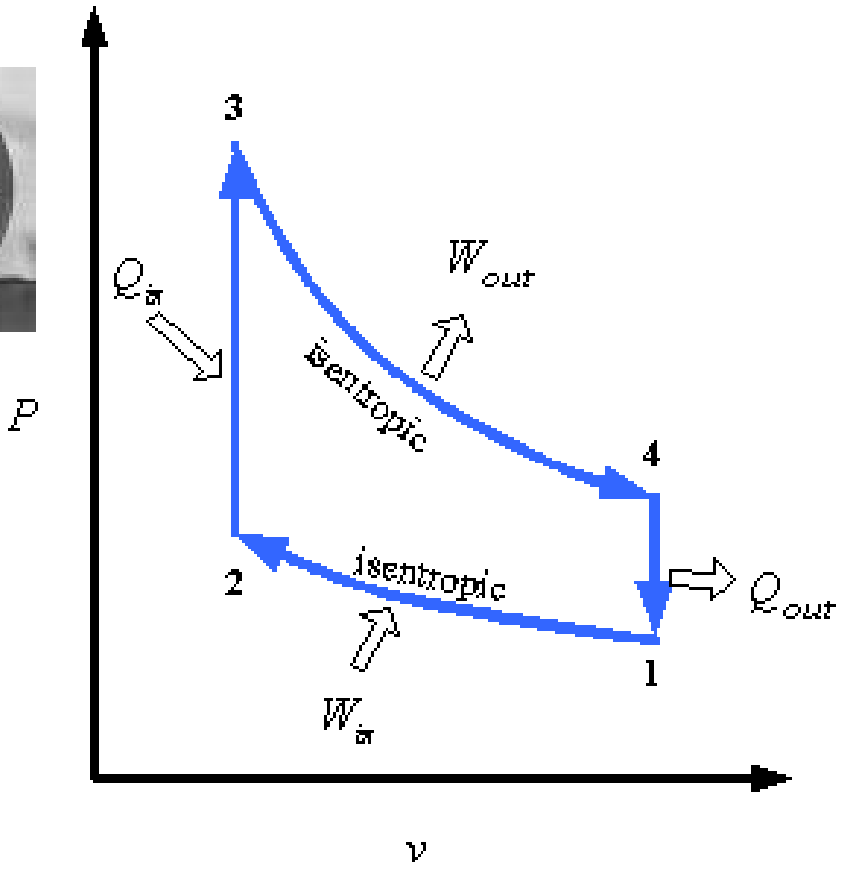
$W = Q_M + Q_H = |Q_M| - |Q_H|$

hatásfok: $\eta = W/Q_M$

$Q_H < 0$ mindig fennáll.

Példa: benzinmotoros autók Otto-ciklusa

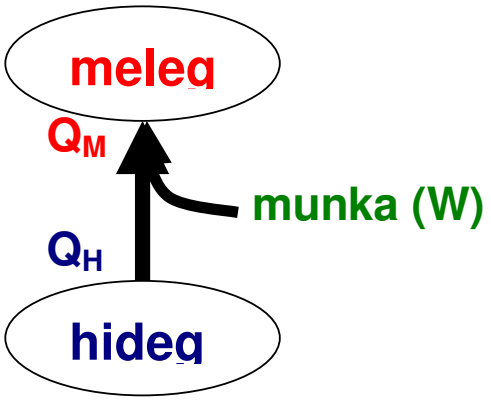




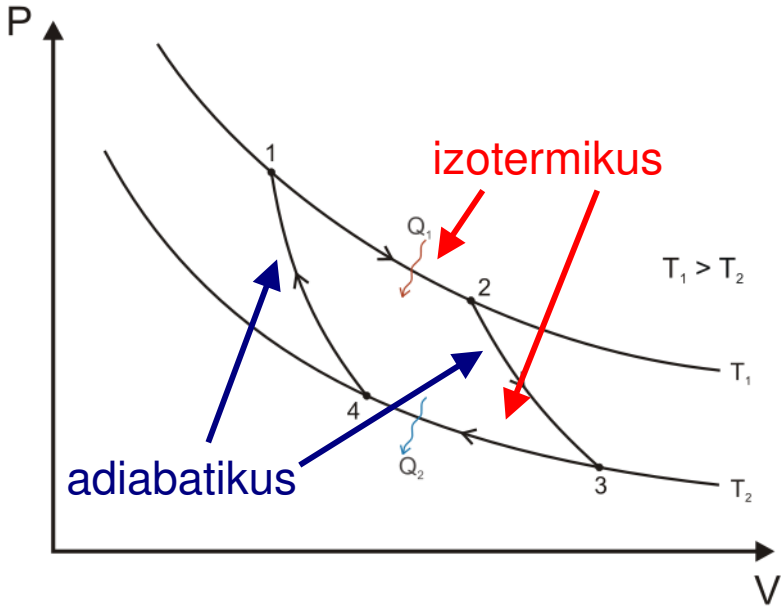
1.) adiabatikus összenyomás
2.) robbanás: p nő, V = állandó
3.) adiabatikus tágulás, munkavégzés
4.) kipufogás: p csökken, V = állandó

Hatásfok: $\eta = 1 - 1/r^{\gamma-1}$
(r ≈ 8: sűrítési faktor → η ≈ 56%)

Hűtőgép: $-Q_M = Q_H - W$
W>0 mindig fennáll



Carnot-ciklus (Sadi Carnot, 1796-1832)
Ez a maximális hatásfokú körfolyamat.
Nem tartalmaz irreverzibilis folyamatokat.
A hőátadás mindig izotermikus.



Hatásfok: $\eta = 1 - T_H/T_M$

Megjegyzés: a Kelvin-féle hőmérsékleti skála pontosan a Carnot-ciklus hőátadásaival van definiálva: $T_H/T_M \equiv - Q_H/Q_M$

6. A termodinamika III. főtétele

Az abszolút nulla fok (K) nem érhető el véges számú termodinamikai lépésben.

$T \rightarrow 0$ esetén S egy konstanshoz tart.

7. Az entrópia

A rendezetlenség mértéke. A rendszer munkavégzésre való „képtelenségét” jellemzi.
Az entrópia egy spontán folyamatban nem csökkenhet.
Irreverzibilis folyamatok során mindig nő.

Példák:

- jégkocka olvadása egy pohár vízben: a víz (egy része) magától sohasem fagy vissza jéggé, pedig az energiamegmaradás nem tiltaná. Jég: rendezett állapot (kristály).
- Tintahal tintájának elkeveredése vízben

Hogyan definiáljuk kvantitatívan?
Infinitezimális izoterm folyamat esetén:

$$\Delta Q = \Delta W = p \cdot \Delta V = nRT \cdot \Delta V/V$$

$$\Delta V/V = (1/nR) \cdot \Delta Q/T$$

Az entrópia megváltozását definiáljuk így:

$\Delta S = \Delta Q/T$ (mértékegysége: J/K).

A rendszer rendezetlenségét (az anyag belső mogzásának intenzitását) adott ΔQ hőmennyiség jelentősebben növeli, ha a rendszer kis hőmérsékletű.

Az entrópia csak a rendszer állapotától függ, attól nem, hogy oda milyen úton jutott el.

Reverzibilis körfolyamatnál $\Delta S = 0$ (pl. Carnot-ciklus).

Irreverzibilis folyamat esetén ΔS a kezdeti és végállapotot összekötő reverzibilis folymatokon keresztül számított integrál:

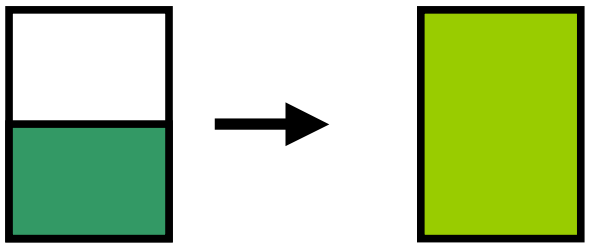
$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

Az entrópia nem marad meg: a II. főtétel szerint nem csökkenhet, általában nő.

Az entrópia mikroszkópikus értelmezése: ha egy adott makroszkópikus állapotot leíró különböző lehetséges mikroállapotok száma w, akkor $S = k \cdot \ln(w)$, ahol $k = R/N_A$ a Boltzmann-állandó.

Példa: pénzfeldobás 4 érmével.
a) makroszkopikus állapot: „mindegyik írás”
mikroszkopikus állapot: ÍÍÍÍ: w = 1.
b) „az érmék fele írás”:
FFÍÍ, FÍFÍ, FÍÍF,
ÍFFÍ, ÍFÍF, ÍÍFF: w = 6.

Példa:
szabad tágulás: tartály egyik felében gáz (N molekula), másikban vákuum.
Eltörjük a válaszfalat.
Ekkor a hőmérséklet nem változik, munkavégzés sincs.
Minden molekula kétszerannyi helyen lehet.



w_1 $w_2=2^N \cdot w_1$

$$\Delta S = k \cdot \ln(w_2) - k \cdot \ln(w_1) =$$
$$= k \cdot \ln(2^N w_1) - k \cdot \ln(w_1) = kN \cdot \ln(2)$$

Vigyázat: itt $\Delta T = 0$, $W = 0$, $\Delta Q = 0$, de mégis változik az entrópia. Ez irreverzibilis folyamat, itt nem lehet a $\Delta S = \Delta Q/T$ képletet használni.

A FIZIKAI MÉRÉSEK HIBÁJA

Hibaszámítás → valószínűségszámításon alapuló külön tudományág
Mi az alapvető *gyakorlati* ismereteket tekintjük át!

A kísérletes tudományokban minden mérésnek bizonytalansága, hibája van → a mérési hibát mindig ismerni kell!

Bármely számszerű adatnál → mi a hiba?
Elfogadhatatlanok azok az adatok, amelyek bizonytalanságának mértékét nem ismerjük

Megválaszolandó kérdések:

- **Mi a mért mennyiség *várható értéke*? (Várható érték: az „*igazi*”, valódi érték.)**
- **Egy újabb mérés értéke hová várható?**
- **A mérési eredményekből levezetett mennyiségeknél mennyi a hiba?**

A mérések sokfélék lehetnek.
Jellegzetes problémák:

- **Azonos módszerrel többször ugyanazt. Meddig mérjünk adott pontossághoz?**
- **Különböző módszerrel ugyanazt → más és más lehet az egyes mérések bizonytalansága. Dobjunk-e el mérést, mert nagy a hibája?**

A bizonytalanságok fajtái:

- ***Statisztikus bizonytalanság*.**
  Oka: a mérést befolyásoló tényezők nem ellenőrzött eltérései az egyes méréseknél, illetve a mért folyamat statisztikus jellege.
- ***Szisztematikus hiba*.**
  Oka: a mérést befolyásoló tényezők értékének helytelen ismerete.

A mért mennyiségeket mindig mértékegységgel és hibával adjuk meg, és csak annyi tizedesjegyre, amennyire értelmes, pl. $98{,}53 \pm 0{,}16$ kg.
(Hiba: egy vagy két tizedesjegyre, maga az érték: ugyanaddig a helyiértékig.)

1. Azonos mennyiséget N-szer megmérünk

→ x_1, x_2, x_3,….x_N

és a bizonytalanságuk kb. ugyanaz.

Ekkor az átlag jól közelíti a várható értéket:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

***Empírikus hiba*: egy újabb mérés mennyire térne el az átlagtól?**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Nem javul több mérés elvégzésével!

A következő mérés eredménye...:

Egyszeres hibán belül: ***68,3%***

Kétszeres hibán belül: ***95,5%***

Háromszoros hibán belül: ***99,7%***

***Standard hiba*: az átlag mennyire tér el a várható értéktől?**

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{(N-1) \cdot N}}$$

Javul további mérések elvégzésével!

2. Ha az egyes mérések bizonytalansága nem egyforma:

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ **mérési eredmények**

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_N$ **bizonytalanságokkal**

Ekkor a súlyozott átlagot alkalmazzuk:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Bármilyen pontatlan új mérés is pontosítja az átlagot: független mérést soha nem szabad eldobni, hanem megfelelő súllyal figyelembe kell venni:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

adatok [kg]	eltérés^2 az átlagtól
75.0	0.19
76.1	0.44
74.7	0.55
75.3	0.02
74.5	0.88
77.4	3.84
75.3	0.02
76.7	1.59
74.8	0.41
74.6	0.71

átlag:	75.44	a fentiek összege:	8.64
		osztva N-1 -gyel:	0.96
	empírikus hiba:	0.98	
	standard hiba:	0.31	
	eredmény:	75.44 ± 0.31 kg	

ugyanez hibákkal:

adatok [kg]	mérési hibák:	súlyok:	súlyozva:
75.0	0.7	2.04	153.06
76.1	0.9	1.23	93.95
74.7	0.7	2.04	152.45
75.3	0.6	2.78	209.17
74.5	0.8	1.56	116.41
77.4	1.2	0.69	53.75
75.3	1.3	0.59	44.56
76.7	0.8	1.56	119.84
74.8	0.7	2.04	152.65
74.6	1.3	0.59	44.14
		nevező:	számláló:
		15.14	**1139.98**

súlyozott átlag:	75.31
standard hiba:	0.26
eredmény:	75.31 ± 0.26 kg

- ***Hibaterjedés*: a mérési eredményekből levezetett mennyiségek hibája.**

  $y_1, y_2, y_3, \ldots y_M$ mérési eredmények

  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_M$ bizonytalanságokkal

A meghatározandó z mennyiség:

$$z=f(y_1, y_2, y_3, \ldots y_M)$$

a levezetett mennyiség hibája:

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)_{\overline{y_i}}^2 \cdot \sigma_i^2$$

- ***Poisson-eloszlás*: adott idő alatt bekövetkező független események eloszlása, ha az átlagos bekövetkezési ráta rögzített, és a legutóbbi esemény bekövetkezésétől eltelt időtől független (pl. másodpercenként leesett esőcseppek vagy elbomlott atommagok száma):**

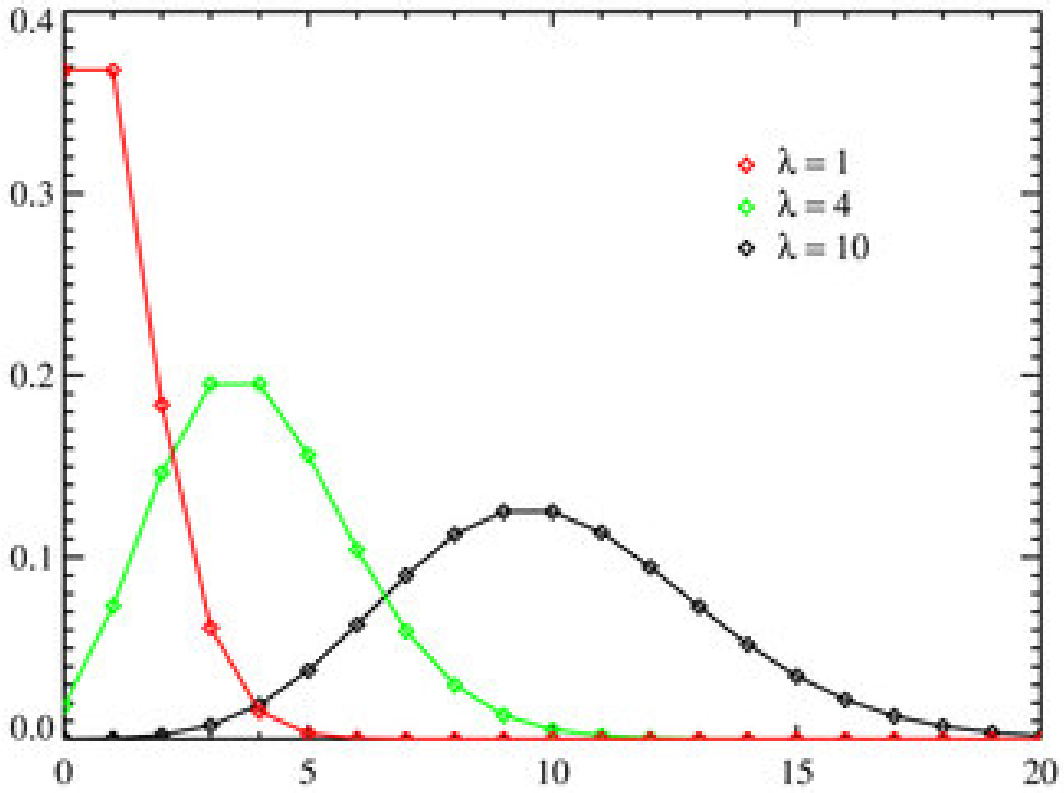
$$P(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

A Poisson-eloszlás

várható értéke: λ

standard hiba négyzete: $\sigma^2 = \lambda$

***relatív hiba*:** $\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

→ **nagyobb λ-ra kisebb.**

Az eloszlás λ = 1, 4, 10-re: