1. fejezet

AMIT MÁR AZ ELEJÉN JÓ TUDNI

(Havancsák Károly)

1.1. Általános bevezetés

A kísérletezés nem volt mindig az emberi megismerés elismert módszere. A görög filozófusok az ideák világában éltek, a középkori Európa tudósai pedig előbbre tartották a spekulációt és a tekintélyekre hivatkozást. Csak hosszú folyamat eredményeként, R. Bacontól (∼1200) Galileiig (∼ 1600) sok tudós munkássága nyomán, az újkor kezdetén jutott el oda a természettudomány, hogy felismerje a kísérletezés jelentőségét a megismerés folyamatában.

Hosszú fejlődés eredménye tehát, hogy a kísérletezés a természettudományos megismerés alapvető részévé vált. A tudatosan megtervezett és kivitelezett kísérlet tapasztalatokat, adatokat szolgáltat a mélyebb összefüggések felismeréséhez, az általános törvények leírásához. Másrészről az elméleti eredmények helyességéről ismét kísérlet útján győződhetünk meg.

A Fizika laboratóriumi mérések I. gyakorlatainak a célja alapvető mérési módszerek, eszközök, kiértékelési eljárások, jegyzőkönyvkészítési technikák megismerése. A kísérletek során egyúttal közvetlen tapasztalatok szerezhetők olyan jelenségekről, amelyek eddig csak az elméleti előadások során kerültek szóba. A mérések megértéséhez és elvégzéséhez szükséges előismeretek köre nem lépi túl a klasszikus fizika határait. A tankönyv megírása során a klasszikus fizikai fogalmakat általában ismerteknek tételeztük fel, bár a mérésleírások elején a legszükségesebb fogalmakat és összefüggéseket összefoglaljuk. A mérések leírása olyan, hogy azok önmagukban is érthetők, vagyis a mérések bármilyen sorrendben elvégezhetők.

A laboratóriumban található mérési összeállítások elektronikus műszereket és számítástechnikai eszközöket is tartalmaznak. A mérések végzéséhez ezeknek felhasználói ismerete szükséges, működésük részletei más tantárgyak anyagát képezik. Ahol szükségesnek látszott, ott a felhasználói alapismereteket a mérésleírások tartalmazzák.

A kísérleti munkában egyre nagyobb szerep jut a számítógépeknek. Szerepük hármas:

a) nagy mennyiségű és gyors adatgyűjtés, amely számítógép nélkül fáradságos, esetenként nem is megvalósítható; b) a mérési adatok rendezésében, kiértékelésében és megjelenítésében a számítógépek számoló, táblázatkezelő és grafikus lehetőségeit használjuk ki; c) a számítógépek sajátos kísérleti eszközként szolgálnak, amikor valódi kísérleti helyzeteket, eszközöket szimulálnak. A mérésleírások között mindhárom felhasználásra találunk példákat. A laboratóriumban belső számítógépes hálózat működik, amelynek része a labor összes számítógépe. Ezeket egy nagy teljesítményű központi egység, a szerver szolgálja ki. A számítógépes hálózatnak része egy lézernyomtató is, amely valamennyi gépről elérhető. A gépeken mérésvezérlő, kiértékelő, táblázatkezelő, ábrakészítő és szövegszerkesztő programok működnek.

A labormunka három részből áll: a felkészülés, a mérés elvégzése és kiértékelése, valamint a jegyzőkönyvkészítés.

1.1.1. A felkészülésről

Az elvégzendő mérések általában összetettek, és több feladatot tartalmaznak. A mérések kivitelezésére a rendelkezésre álló 4 óra általában elegendő, de csak akkor, ha egy alapos otthoni felkészülés előzte meg. A felkészülés alapeszköze ez a tankönyv. Az *Általános bevezetés* és a *Hibaszámítás alapjai* fejezetek ismerete valamennyi méréshez szükséges. Ezeken túlmenően az egyes mérésleírások önállóan is megérthetők. Valamennyi méréssel kapcsolatban, a fogalmak és összefüggések átfogó felelevenítésére, elsősorban *Budó Á.: Kísérleti Fizika I., II., III.* kötetei ajánlottak. Azok számára, akik további, mélyebb ismereteket kívánnak szerezni, az egyes témáknál ezen kívül is található ajánlott irodalom.

A felkészülés kapcsán helyes eljárás az, ha a mérést megelőző héten, a napi mérési feladat elvégzését követően, szemrevételezzük a következő mérés összeállítását, esetleg az aznapi mérőt megkérdezzük a tapasztalatairól. A felkészülésben segíthet a labor internetes honlapja is. Itt a mérőeszközről, az egyes műszerekről fényképeket találunk, és az adott méréssel kapcsolatos esetleges változásokról értesülhetünk. A hiányos felkészülés azt eredményezheti, hogy a rendelkezésre álló idő elégtelen a feladatok maradéktalan elvégzéséhez, illetve a kapkodás és az ismeretek hiánya a berendezések meghibásodásához vezethet. Ezt elkerülendő a mérés megkezdése előtti beszélgetés során a laborvezető meggyőződik a mérést végző felkészültségéről.

1.1.2. A jegyzőkönyv készítéséről

A laboratóriumi mérésekről jegyzőkönyvet készítünk. A jegyzőkönyvet legcélszerűbb üres A4-es méretű lapra készíteni. Az első oldal a mérés számát és címét, a mérés és a beadás időpontját, a mérő nevét és évfolyamát tartalmazza. A következő oldalak a laborban végzett munka dokumentumai. Soroljuk fel, hogy milyen eszközökkel dolgoztunk, adjuk meg a minták jelét vagy számát, készítsünk vázlatot a mérési összeállításról, jegyezzünk

fel minden olyan körülményt, amit a méréssel kapcsolatban fontosnak tartunk, és természetesen jegyezzük fel a mérési adatokat! A mérési adatok felsorolásának legcélszerűbb módja a táblázatos megadás. Mintatáblázatokat a tankönyv is tartalmaz. Törekedjünk arra, hogy a laborban készült feljegyzéseink, ha gyorsan készülnek is, világosak, egyértelműek és mások számára is áttekinthetők legyenek! A mérés végeztével az adatlapot a laborvezető aláírásával látja el.

A jegyzőkönyv többi része a kiértékeléshez tartozik. A kiértékelést általában otthon végezzük, de a laborvezető által megadott időben a laboratórium a labormérésen kívül is látogatható, és a számítógépek kiértékelés céljára használhatók.

A kiértékelés során a számításoknál tüntessük fel, hogy milyen összefüggés alapján számolunk! A számítások legyenek áttekinthetőek! A rész-számolásokat nem kell a jegyzőkönyvben rögzíteni, a részeredményeket azonban célszerű. Így a javítás során az esetleges hibák forrása könnyebben felderíthető. Különös figyelmet fordítsunk arra, hogy az egyes mennyiségeket milyen egységekben mértük, illetve számoljuk! Használjuk a szabványos *SI* egységeket! A mértékegységeket az adatok és a számolt mennyiségek mellett mindig tüntessük fel!

Mérésünk csak akkor értékelhető, ha a mért és számolt mennyiségek mellett megadjuk azok hibáját is. A hibaszámításnak se csak a végeredményét tüntessük fel, hanem röviden indokoljuk, hogy milyen gondolatmenettel, milyen adatokból kaptuk a hibát!

A mérési adatokat ábrákon is meg kell jeleníteni! Az ábrákról sokkal könnyebben leolvashatók a tendenciák, mint a táblázatokból. A valamilyen okból kiugró pontok is könnyebben fedezhetők fel az ábrán, mint a táblázatban. Az ábrákat korábban kézzel, milliméterpapírra készítették, de ma már egyszerűbb és gyorsabb a számítógépes ábrázolás. A laboratórium számítógépei táblázatkezelő és ábrakészítő programot is tartalmaznak. Az ábrakészítés első lépése a megfelelő lépték megválasztása. Durva közelítésként a lépték akkor jó, ha a görbe a 45 fokos egyenes környezetében helyezkedik el. A tengelyeken legyen beosztás, ezeket jelző számok, az ábrázolt fizikai mennyiségek jelei és mértékegységei! Ha egy ábrán több görbét is megjelenítünk, akkor a hozzájuk tartozó pontokat célszerű különböző jelekkel ábrázolni. Az ábrának legyen száma, és az ábraaláírás tájékoztasson arról, hogy az ábra mit mutat! A mérési pontokat ne kössük össze lázgörbeszerűen egyenes szakaszokkal! A mérési pontokra illesszünk görbét! Ez a görbe, a hibaszámítás fejezetben mondottak értelmében, a legtöbb esetben egyenes lesz. A tankönyvben számos ábra található, ezeket is a fenti elvek figyelembevételével készítettük.

1.1.3. Munkavédelmi előírások

A Klasszikus Fizika Laboratórium nem tartozik a különösen veszélyes kategóriába. Ennek ellenére a munkavédelmi előírásokat minden esetben szigorúan be kell tartani! Fontos előírás az, hogy a legkisebb rendellenességről azonnal értesítsük a laborvezetőt!

Bármilyen vegyszert megkóstolni, vegyszeres üvegbe közvetlenül beleszagolni nem

szabad! A laboratóriumban ne étkezzünk, és ne dohányozzunk! A folyadékokat, vegyszereket használaton kívül mindig zárt edényben tartsuk! Munkahelyünk mindig legyen száraz! Az esetleg lecseppenő folyadékot azonnal töröljük fel!

Az esetleg eltört hőmérőből kikerülő higanyt papírlappal gondosan össze kell gyűjteni, és a higannyal szennyezett környéket kénporral be kell szórni!

A laboratóriumban az egyik mérésnél fémeket olvasztunk. Az olvasztókályha meleg részeihez csak csipesszel szabad nyúlni! A forró tetőt, illetve a már megdermedt fémet csak a részükre kialakított tartóra tegyük le! A kályhából a fémet olvadt állapotban kivenni tilos! Ne feledkezzünk el arról, hogy a megdermedt fém is még néhány száz fokos lehet!

Egy másik mérésnél fényforrásként kis teljesítményű lézert használunk. Vigyázzunk rá, hogy a lézer direkt nyalábja ne juthasson a szemünkbe!

Nagy gondot kell fordítani az elektromos készülékek használatára. *30 V*-nál nagyobb feszültség vagy az emberi szervezeten átfolyó *1-2 mA*-es áram már életveszélyes!

A laboratóriumokban rendszerint nem tartható be a vízvezeték és elektromos hálózat közötti minimális *2 m*-es távolság. Bár elektromos eszközeink a szabványnak megfelelően kettős szigetelésűek, és a házuk földelt, mégis ügyeljünk arra, hogy a vízvezetéket és a feszültség alatt levő eszközöket egyszerre ne érintsük!

Minden elektromos baleset esetén első teendő a feszültségforrás kikapcsolása. Ezt legegyszerűbben a mérőasztalnál lévő biztosítékok kikapcsolásával tehetjük meg.

Tűz esetén az elektromos berendezés vízzel vagy haboltóval nem oltható! A poroltóval a műszerekben hatalmas károkat okoznánk. A tűz elfojtására ilyenkor leghelyesebb, az áramtalanítást követően, a laborban található gázzal oltó készülékeket vagy a tűzoltó kendőket használni.

Beindított kísérleteket, bekapcsolt áramokat a munkahelyen otthagyni még rövid időre sem szabad! Ha valamilyen ok miatt rövid időre elhagyjuk a labor helyiségét, a kályha fűtőtekercsében, a mágnes tekercsében stb. folyó áramot csökkentsük nullára, helyezzük az eszközöket alapállapotba! A műszereket, számítógépet azonban nem kell kikapcsolni! A ki- és bekapcsolás nem tesz jót ezeknek az eszközöknek.

A gyakorlat befejezése után minden feszültségforrást kapcsoljunk ki, és ezt követően az automata biztosítékokat is kapcsoljuk le! A vízcsapok elzárására kérjük meg a laborvezetőt!

1.2. A hibaszámítás alapjai

1.2.1. A mérések pontossága

A mérés célja a mérendő mennyiség többnyire nem ismert, valódi értékének meghatározása. A mért adataink azonban általában hibával terheltek, ezért a valódi értéket csak közelíteni tudjuk a mérési adatok segítségével. A mérési hibák megfelelő kezelése azért fontos, mert így tudjuk meghatározni azt, hogy a mért érték milyen pontossággal közelíti a mérendő mennyiség valódi értékét. A mérési eredmény közlése azt jelenti, hogy nemcsak a mért mennyiség értékét adjuk meg, hanem azt is, hogy a mért adat nagy valószínűséggel milyen intervallumon belül közelíti meg a valódi értéket. Ezért fontos, hogy megadjuk a mért érték hibáját is.

Sokszor úgy tűnhet, hogy a hiba kiszámítása körülményesebb, mint a mérendő mennyiség értékének meghatározása. Lehet, hogy így van, de ez a munka nem takarítható meg. Mérésünk hibájának meghatározása része a mérés folyamatának. Mérési eredményünk a hiba megadása nélkül tudományos és műszaki értelemben értéktelen.

A mérési hibák három típusba sorolhatók: szisztematikus (rendszeres) hiba, leolvasási hiba, statisztikus (véletlen) hiba. Ezek eredete is különböző, és különböző kezelési módokat is igényelnek.

1.2.2. Szisztematikus hiba

A szisztematikus hibák a mérés többszöri megismétlésekor is ugyanolyan mértékben jelentkeznek. Ezek a hibák elsősorban a mérőeszköz pontatlanságából erednek. Ha például a mérőrúd hossza, a ráírt *1 m* helyett, csak *99,9 cm*, akkor az ilyen méterrúddal mért távolságok egy állandó értékkel mindig eltérnek a pontosabb rúddal mért értéktől, függetlenül attól, hogy hányszor ismételjük meg a mérést. Tehát a mérések ismétlésével ez a hiba nem küszöbölhető ki. A szisztematikus hibák felderítése sokszor nem egyszerű feladat. A legjobb eljárás az, ha berendezésünket egy hitelesített mérőeszközzel hasonlítjuk össze, azaz *hitelesítjük* (kalibráljuk). Ezáltal meghatározhatjuk azt a kalibrációs értéket, amellyel módosítva a mért értéket kiküszöbölhető a szisztematikus hiba. Ha kalibrációra nincs mód, akkor is megbecsülhető eszközünk szisztematikus hibájának nagysága a gyártó által megadott adat alapján (pl. a mért értékre vonatkoztatva *0,1 %, 1 %* stb.).

A szisztematikus hibáknak van egy másik fajtája is, amely a mérési módszerből ered, esetleg a mérés során ismeretlen külső körülmény okozza. Példaként ilyen jellegű szisztematikus hibát okoz, ha mágneses tér mérésekor egy ismeretlen külső forrásból eredő tér adódik hozzá minden mérési eredményünkhöz. Az ilyen hibákat úgy csökkenthetjük, ha a mérést több módszerrel is elvégezzük, vagy esetleg egy másik laboratóriumban megismételjük.

Ha a mért mennyiségből számolással újabb mennyiségeket származtatunk, további szisztematikus hibát okozhat, ha pontatlan (esetleg közelítő) képletet használunk. Ilyen-

kor meg kell vizsgálni, hogy az így okozott hiba nagyobb-e az egyéb hibáknál, és ha igen, akkor pontosabb képletet vagy korrekciókat kell alkalmazni.

1.2.3. Leolvasási hiba

A hosszmérésnél maradva, ha a méterrúd *cm* beosztású, akkor ezzel az eszközzel az $52,2$ *cm* és az $52,3$ *cm* hosszú mérendő tárgyat azonos hosszúságúnak mérjük. Ebben az esetben a mérendő hosszat $0,5$ *cm* pontossággal tudjuk meghatározni. Általában a leolvasási hibát az utolsó értékes számjegy (digit) felével szoktuk megadni. Jobb mutatós (analóg) műszerek esetén, a leolvasási hiba csökkentése érdekében, tükörskálákat szoktak használni, amellyel kizárható a leolvasó szem helyzetéből adódó ún. *parallaxis hiba.*

1.2.4. Statisztikus hiba

A mérés során a mérendő mennyiséget számos nem ismert vagy nem ellenőrizhető tényező befolyásolja. Ezeknek a tényezőknek a hatása általában kicsi, egymástól függetlenek, és mérésről-mérésre változnak. Ha megismételjük a mérést, akkor e tényezők hatására általában kissé különböző eredményt kapunk. Ilyen külső tényezők lehetnek például a külső mechanikus zajok, kis légmozgások, a környezet hőmérsékletének kis ingadozásai, elektronikus vagy mágneses zajok stb. A mérendő mennyiség maga is lehet statisztikus jellegű, mint például egy rúd átmérője, amely a megmunkálás bizonytalansága miatt a hossz mentén kissé ingadozik. Másik példaként, tulajdonságából adódóan, statisztikus jellegű mennyiség a radioaktív anyagban az időegység alatt elbomló atomok száma.

Az ilyen jellegű hibák statisztikus törvényszerűségeket követnek, elnevezésük is innen származik. Leírásukkal a valószínűség-elmélet és a matematikai statisztika foglalkozik. *A statisztikus hibák esetén a mérés többszöri megismétlése a mérendő mennyiség valódi értékének egyre jobb megközelítését teszi lehetővé.*

A statisztikus jelleg azt jelenti, hogy ha az y mennyiség mérését n-szer megismételjük, akkor általában különböző eredményeket kapunk. Jelöljük ezeket a mérési eredményeket az $y_1, y_2, \ldots y_n$ szimbólumokkal! A matematikai statisztika szerint a mérendő mennyiség valódi értékének legjobb becslését az y_i mennyiségek átlaga adja:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \tag{1.1}$$

Az (1.1) átlagot a statisztikában *empirikus várható értéknek* nevezik. Mivel az empirikus várható érték kisebb hibával közelíti meg a mérendő mennyiség (nem ismert) valódi értékét, ezért célszerű $\bar{y}$-t tekinteni a mérés eredményének. Kérdés az, hogy mit tekintsünk a mérési eredmény hibájának?

1.2.5. Abszolút hiba

Az egyes mérések y_i eredményei szórnak az $\bar{y}$ átlag körül. Ez azt jelenti, hogy a $\Delta y_1 = y_1 - \bar{y}$, $\Delta y_2 = y_2 - \bar{y}$, ...$\Delta y_n = y_n - \bar{y}$ átlagtól való eltérések hol pozitív, hol negatív értéket vesznek fel (az eltérések összege nullát ad). Az átlagtól való eltérés nagyságára például becslést adhat az ún. abszolút hiba:

$$\Delta y = \frac{|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + ... + |\Delta y_n|}{n} \quad . \tag{1.2}$$

Szokás még gyors becslésként a mérés abszolút hibájának tekinteni a

$$\Delta y = \max |y_i - \bar{y}| \tag{1.3}$$

mennyiséget is.

Az (1.3) kifejezés esetén nyilvánvaló, de az (1.2) kifejezés számlálójában szereplő összegről is könnyen belátható, hogy túlbecsüli a hibát. Az abszolút hibát csak a statisztikus hibák első becslésének tekinthetjük. A matematikai statisztika szerint a mérés hibájára a fentieknél jobb becslés is adható. Ennek ellenére sok esetben elfogadható mérési hibaként az abszolút hiba megadása.

1.2.6. Empirikus szórás

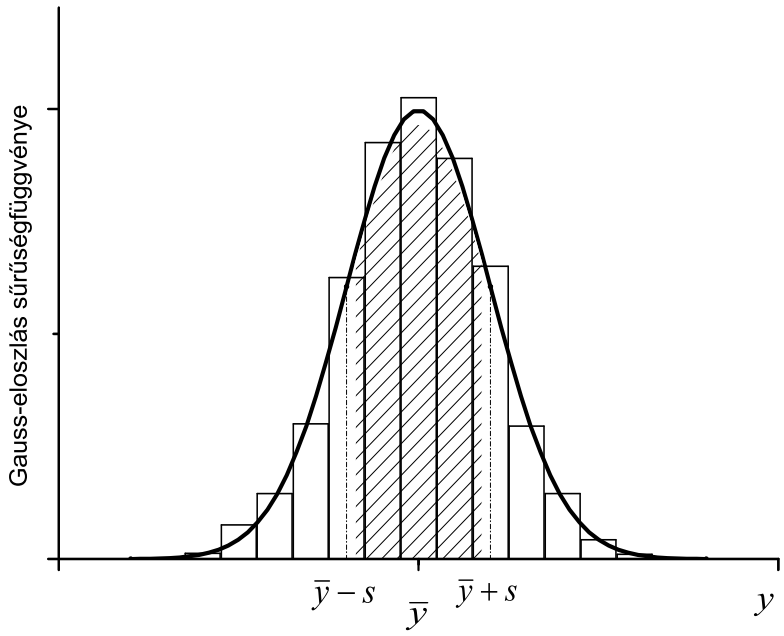
Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a matematikai statisztika azon eredményeit, amelyek a statisztikus hibák pontosabb kezelését teszik lehetővé.

Mint azt korábban már említettük, a statisztikus hiba sok *véletlen*, egymástól *független* kis hatás *összegéből* tevődik össze. A valószínűség-elméletből ismert, hogy ilyenkor az y_i mennyiségekre érvényes a *központi határeloszlás tétel*. Ennek alapján az y_i mennyiségek olyan valószínűségi változók, amelyek *normális eloszlást* (*Gauss-eloszlást*) követnek. Mit jelent ez? A normális eloszlás sűrűségfüggvénye harang alakú görbe (1.1. ábra). Ha az y tengelyt beosztjuk kis intervallumokra, és az intervallumok fölé olyan téglalapokat rajzolunk, melyek magassága az intervallumba eső mérési adatok relatív gyakorisága, osztva az intervallum szélességével (így kapunk sűrűség jellegű mennyiséget), akkor egy *hisztogramot* kapunk (1.1. ábra).

Az, hogy a mérési adatok eloszlása normális, azt jelenti, hogy mennél nagyobb a mérések száma, a hisztogram annál jobban közelít a normális eloszlás haranggörbéjéhez, ahogy ezt az 1.1. ábra is mutatja.

A haranggörbe maximuma $\bar{y}$ értéknél van.

Bár a haranggörbe egy elméleti függvény, szélessége a mérési adatokból származtatott s mennyiséggel is jellemezhető:



1.1. ábra. A normális eloszlás harang alakú görbéje és a hisztogram

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \tag{1.4}$$

Az s mennyiség elnevezése *empirikus szórás*. Ez a kifejezés csak kissé különbözik az átlagos eltérésnégyzet négyzetgyökétől, hiszen a nevezőben n helyett *n-1* szerepel. A matematikai statisztika megmutatja, hogy ez a helyes és *torzítatlan becslése* a görbe elméleti szélességének.

A sűrűséggörbe alapján kiszámítható, hogy ha az y mennyiség mérését n-szer megismételjük, akkor milyen gyakorisággal esnek az y_i mért értékek az körüli valamely $\bar{y} \pm \Delta y$ intervallumba. A görbe $(\bar{y} - \Delta y, \bar{y} + \Delta y)$ intervallumba eső része alatti terület adja meg ezt a gyakoriságot. Megmutatható például, hogy az $\bar{y} \pm s$ intervallumba várhatóan a mérési értékek 68%-a esik. Az ábrán ez a besatírozott terület. Az is megmutatható, hogy az $\bar{y} \pm 2s$ intervallumba már várhatóan a mérési értékek 95%-a esik.

Az s mennyiség tehát az y_i értékek $\bar{y}$ körüli szórását jellemzi. Bennünket azonban elsősorban az érdekel, hogy mit tekintsünk az $\bar{y}$ mért érték hibájának.

Könnyen belátható, ha több mérési sorozatot végzünk, akkor általában különböző $\bar{y}$ értékeket kapunk. Nyilvánvaló tehát, hogy $\bar{y}$ szintén valószínűségi változó, amelynek szintén van szórása. A matematikai statisztika szerint az $\bar{y}$ átlagérték szórására (hibájára) a legjobb becslést az alábbi $s_{\bar{y}}$ mennyiség adja:

$$s_{\bar{y}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} \tag{1.5}$$

Az $s_{\bar{y}}$ mennyiséget az *átlag empirikus szórásának* nevezzük. Látható, hogy minél nagyobb számú mérést végzünk, vagyis n minél nagyobb, annál kisebb az $s_{\bar{y}}$, igaz nem túl gyors ez a csökkenés. *Az $\bar{y}$ mennyiség Δy hibájának tehát az átlag empirikus szórását tekintjük*:

$$\Delta y = s_{\bar{y}}. \tag{1.6}$$

Ahhoz, hogy a statisztikus törvényszerűségeket kihasználhassuk, megfelelő számú mérést kell végrehajtani. *2-3* mérésből legfeljebb az (1.2) kifejezés alapján becsülhető a hiba. *10* körüli méréssszám esetén már alkalmazható az (1.5) kifejezés.

1.2.7. A mérési eredmény megadása

Bármilyen jellegű hibáról van is szó, és a statisztikus hibákat akár az (1.1), (1.2) vagy (1.5) kifejezés alapján számoljuk, ezt követően a mérés eredményének felírása az alábbiak szerint történik:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y. \tag{1.7}$$

A Δy hiba mértékegysége megegyezik a mért mennyiség mértékegységével. Szokás még a hibát a mért mennyiséghez viszonyítva, ún. *relatív hibaként* megadni, amelyet az alábbi kifejezéssel definiálunk:

$$\frac{\Delta y}{\bar{y}}. \tag{1.8}$$

A relatív hiba mértékegység nélküli szám, amelyet kifejezhetünk százalékban is. Ilyenkor a relatív hibát a

$$\frac{\Delta y}{\bar{y}} \cdot 100\% \tag{1.9}$$

kifejezés definiálja.

Ha például a nehézségi gyorsulás mérés eredményeképpen azt kapjuk, hogy $g = 9,793584\ m/s^2$, és $\Delta g = 0,031057\ m/s^2$, akkor a szokásos eljárás a következő. Először a hibát egy értékes jegyre kerekítjük, tehát $\Delta g = 0,03\ m/s^2$. Ezután a g értékét a hibának megfelelő értékes jegyre kerekítjük, tehát $g = 9,79\ m/s^2$. A mérés végleges eredményét így írjuk fel:

$$g = (9,79 \pm 0,03)\ \frac{m}{s^2}$$

Még elfogadható felírás a követő:

$$\mathrm{g} = 9{,}79\ \frac{\mathrm{m}}{s^2} \pm 3\%$$

Ha az eredményt normál alakban adjuk meg, akkor az alábbi formában írjuk fel:

$$E = (7,05 \pm 0,04) \cdot 10^{10}\ Pa.$$

Megjegyzések:

A számolások során a részeredmények kerekítését célszerű legalább eggyel több értékes jegyre végezni, nehogy a korai kerekítések megváltoztassák a végeredmény értékét.

A mértékegység a fizikai mennyiség része. Mértékegység nélkül tehát ne írjunk fel fizikai mennyiségeket, kivéve ha a szóban forgó mennyiség mértékegység nélküli szám!

1.2.8. Hibaterjedés

Méréseink során sokszor nem a műszerről leolvasott, közvetlenül mért mennyiség érdekel bennünket, hanem az abból valamilyen függvénykapcsolattal értelmezett, származtatott mennyiség. Mivel a mért mennyiség hibával terhelt, természetes, hogy a származtatott mennyiségnek is lesz hibája. A kérdés az, hogy a hiba a mért mennyiségről hogyan terjed át a származtatott mennyiségre?

A meghatározandó z mennyiséget a

$$z = f(\bar{y}) \tag{1.10}$$

függvénykapcsolat határozza meg. Keressük a

$$z \pm \Delta z = f(\bar{y} \pm \Delta y) \tag{1.11}$$

kifejezéssel definiált Δz értéket.

Fejtsük Taylor-sorba az (1.10) kifejezést $\bar{y}$ értéke körül:

$$z + \Delta z = f(\bar{y}) + \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=\bar{y}} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right|_{y=\bar{y}} (\Delta y)^2 + \dots \tag{1.12}$$

Mivel z mért értékének a

$$z = f(\bar{y}) \tag{1.13}$$

értéket tekintjük, az (1.12) és (1.13) egyenletek különbségéből adódik Δz értéke:

$$\Delta z = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=\bar{y}} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right|_{y=\bar{y}} (\Delta y)^2 + \dots \tag{1.14}$$

Ha Δy kicsi, akkor a magasabb rendű tagok elhanyagolhatók. A z származtatott mennyiség hibája tehát:

$$\Delta z = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=\bar{y}} \Delta y. \tag{1.15}$$

Ha a számolásból Δz negatívnak adódna, akkor az abszolút értékét kell venni, hiszen Δz a z származtatott érték körüli intervallum hosszát jelenti. A z mennyiség relatív hibája a

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{f(\bar{y})} \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=\bar{y}} \Delta y \tag{1.16}$$

kifejezéssel adható meg.

1.2.9. Hibaterjedés több változó esetén

Sokszor a származtatott mennyiség nem egy, hanem több egymástól független változó függvénye. Ilyenkor például három, u, v, w változó esetén: $z = f(u, v, w)$. A függetlenség azt jelenti, hogy mindegyik változót külön-külön, egymástól független mérési folyamatból nyerjük. Az előbbi gondolatmenethez hasonlóan, az (1.15) kifejezés három változóra kiterjesztett alakja:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial f}{\partial w}\Delta w. \tag{1.17}$$

Mivel (1.17)-ben az egyes tagok negatív értékeket is felvehetnek, azt viszont további meggondolások nélkül nem tudjuk, hogy az egyes hibák milyen törvényszerűség szerint csökkentik egymást, ezért az (1.17) kifejezésben szereplő tagok abszolút értékét szokás összeadni, vagyis:

$$\Delta z = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial w}\Delta w\right|. \tag{1.18}$$

Azzal azonban, hogy az abszolút hibákat összeadjuk, Δz hibáját túlbecsüljük. A valószínűség-elmélet figyelembe veszi azt, hogy van annak valószínűsége, hogy ellenkező

előjel esetén a tagok hibái csökkentsék egymást, és ezért jobb becslést tud adni. Eszerint több független változó esetén a hiba optimális becslése (1.18)-sal szemben:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 (\Delta u)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 (\Delta v)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 (\Delta w)^2}. \tag{1.19}$$

Mindazonáltal, mivel az (1.18) kifejezés egyszerűbb, valamint az (1.18) és (1.19) kifejezésekkel számolt hibák nagyságrendileg általában nem különböznek, ezért az esetek többségében méréseink során megelégszünk az (1.18) kifejezés alapján kapható hiba megadásával.

1.2.10. A hibaterjedéssel kapcsolatos következmények

Az alábbiakban néhány esetben kiszámítjuk azt a hibaterjedési szabályt, amelyet egyes esetekben a számolásokban célszerű felhasználni. Megadjuk mind a hibabecslésre használható (1.13), mind pedig a pontosabb számolásokra ajánlott (1.14) kifejezésből adódó formulákat.

1. Szorzás állandóval

Ha a $z = f(u)$ függvény

$$z = cu$$

alakú, ahol c egy állandó, akkor az (1.18) és az (1.19) kifejezés egyaránt a

$$\Delta z = |c|\,|\Delta u| \tag{1.20}$$

egyszerű alakot ölti, vagyis a mért u mennyiség abszolút hibáját meg kell szorozni az állandó értékével. Az abszolút érték biztosítja, hogy az eredmény mindig pozitív szám lesz. A relatív hiba

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta u}{u}. \tag{1.21}$$

Ebben az esetben tehát a z származtatott mennyiség relatív hibája megegyezik az u mért mennyiség relatív hibájával.

2. Összeg és különbség

Két változó esetét tekintjük. Legyen $z = f(u, v) = u \pm v$! Ha a durvább (1.18) becslés alapján dolgozunk, akkor

$$\Delta z = |\Delta u| + |\Delta v|\,. \tag{1.22}$$

Az (1.19) kifejezés alakja pedig:

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} \quad . \tag{1.23}$$

A relatív hiba összetettebb alakú, ezért összeg esetén célszerű az abszolút hibákkal számolni.

3. Szorzat és hányados

Ha a $z = f(u, v) = uv$, akkor az (1.18) kifejezés alakja

$$\Delta z = |v\Delta u| + |u\Delta v|\,,$$

ahonnan a relatív hiba:

$$\frac{\Delta z}{z} = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v}\right|. \tag{1.24}$$

Az (1.19) kifejezésből adódó alak:

$$\Delta z = \sqrt{v^2(\Delta u)^2 + u^2(\Delta v)^2},$$

és a relatív hiba:

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2}. \tag{1.25}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy hányados esetén is igaz az 1.24) és az (1.25) összefüggés. Szorzat és hányados esetén tehát a relatív hibákra adódó egyszerű összefüggések miatt célszerű ezek alkalmazása.

4. Hatványfüggvény

A $z = f(u, v) = u^m v^n$alak esetén ismét a relatív hibák adnak egyszerűbb összefüggést. Az (1.13) kifejezés alapján kapott alak:

$$\frac{\Delta z}{z} = \left|m\frac{\Delta u}{u}\right| + \left|n\frac{\Delta v}{v}\right|, \tag{1.26}$$

az (1.19) kifejezés alapján pedig a

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(m\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \left(n\frac{\Delta v}{v}\right)^2}, \tag{1.27}$$

alakra jutunk. Vagyis a relatív hibák a kitevővel súlyozódnak mindkét esetben.

Az (1.27) kifejezés a mérésre vonatkozóan is tartalmaz utasítást. Látjuk, hogy a kifejezésekben szereplő relatív hibák nem egyforma súllyal szerepelnek a számított mennyiség hibájában. A magasabb hatványon szereplő mennyiségek nagyobb súllyal szerepelnek. A mérés során törekednünk kell tehát arra, hogy a nagyobb súllyal szereplő mennyiségeket pontosabban mérjük, hiszen az eredmény hibáját ezek többszörösen befolyásolják.

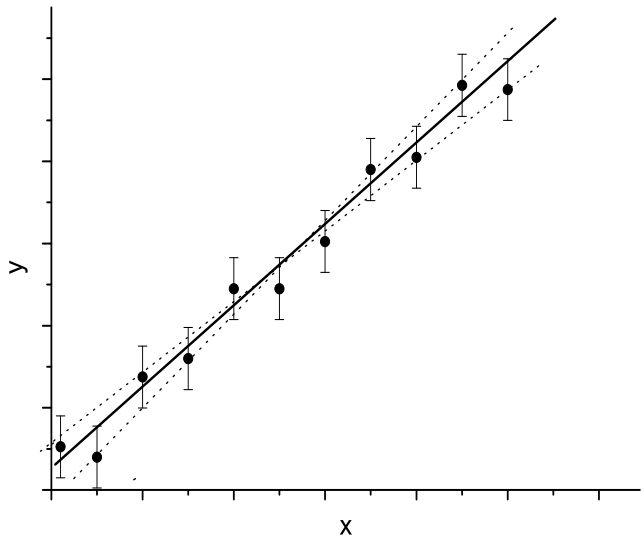
1.2.11. A legkisebb négyzetek módszere

A tudományos vizsgálatok során gyakran a mért mennyiségek közötti függvénykapcsolat analitikus alakját kell meghatározni. Tegyük fel, hogy n darab (x_1, y_1), (x_2, y_2),... (x_n, y_n) mérési pontunk van, és az x, y mért mennyiségek között lineáris kapcsolatot tételezünk fel, vagyis:

$$y = mx + b. \tag{1.28}$$

A mérés célja ilyenkor az m és b értékek meghatározása, és a lineáris kapcsolat igazolása.

A leggyorsabb, de sokszor nem kielégítő pontosságú módszer, ha grafikusan oldjuk meg a feladatot. Koordináta-rendszerben ábrázoljuk az (x_i, y_i) értékpárokat és a hozzájuk tartozó Δy_i hibákat. Mivel a mért pontok véletlen hibákat tartalmaznak, ezért nem lesznek pontosan rajta egy egyenesen. Hogyan próbálhatunk legjobban illeszkedő egyenest keresni? A vonalzót úgy fektetjük a pontokra, hogy követve a pontok növekvő vagy csökkenő menetét hozzávetőleg azonos számú pont kerüljön az egyenes alá és fölé (1.2 ábra).



1.2. ábra. A legjobban illeszkedő egyenes grafikus megkeresése

Ezt követően meghatározzuk a kapott egyenes meredekségét és tengelymetszetét. A meredekség és a tengelymetszet hibája is megbecsülhető grafikusan, hiszen húzhatunk

két egyenest, az optimálisnál kisebb és nagyobb meredekséggel, amelyeket még összeegyeztethetőnek tartunk a mérési pontokkal és azok hibáival (az 1.2. ábrán a szaggatott vonallal rajzolt egyenesek). Az így kapott egyenesek meredekségéből és tengelymetszetéből az optimális egyenes paramétereinek hibája becsülhető. Pontosabb eredményt kapunk azonban, ha az illesztést analitikus úton végezzük. Erre ad lehetőséget a *legkisebb négyzetek módszere*. Elvileg az alább ismertetett módszer akkor alkalmazható, ha csak az y mért érték rendelkezik *statisztikus hibával*, valamint az y_i értékek szórása minden x_i pontban azonos, ugyanakkor az x értéknek nincs hibája. A gyakorlatban ez sokszor úgy jelentkezik, hogy x értékét sokkal pontosabban tudjuk meghatározni, mint y értékét. Ha mindkét változó értéke egyformán hibás, akkor is alkalmazható a legkisebb négyzetek módszere, de az eljárás az alább ismertetettnél bonyolultabb.

Elméleti megfontolásokból tudjuk, hogy a mért (x, y) mennyiségek között igaz az (1.28) lineáris összefüggés. Az (x_i, y_i) mért értékpárok azonban hibával rendelkeznek, ezért csak azt teszik lehetővé, hogy meghatározzuk azt az

$$y = \hat{m}x + \hat{b} \tag{1.29}$$

egyenest, amely legjobban illeszkedik a mért n darab pontra. $\hat{m}$ és $\hat{b}$ az m és b paraméterek valódi értékének a mérési pontok alapján becsült értékei. Tegyük fel, hogy már meghatároztuk a legjobban illeszkedő egyenes meredekségét ($\hat{m}$) és tengelymetszetét ($\hat{b}$)! Az ezekkel a paraméterekkel felrajzolt egyenes az x_i pontokban az

$$y_i^* = \hat{m}x_i + \hat{b} \tag{1.30}$$

értékeket vesz fel. Képezzük a mért pontok és az így kapott egyenes pontjainak eltérését (1.3. ábra):

$$y_i - y_i^* = y_i - (\hat{m}x_i + \hat{b}) \quad . \tag{1.31}$$

A legjobb illeszkedés feltétele úgy is megfogalmazható, hogy ezeknek az eltéréseknek a négyzetösszege legyen minimális, azaz az

$$S(\hat{m}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (\hat{m}x_i + \hat{b}) \Big)^2 \tag{1.32}$$

kifejezés minimumát keressük, $\hat{m}$ és $\hat{b}$ függvényében. Az összeg olyan értékeknél minimális, ahol a

$$\frac{\partial S(\hat{m}, \hat{b})}{\partial \hat{m}} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial S(\hat{m}, \hat{b})}{\partial \hat{b}} = 0 \tag{1.33}$$

feltételek teljesülnek. Az (1.33) két feltétel két egyenlet felírását teszi lehetővé:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - (\hat{m}x_i + \hat{b})\right)(-x_i) = 0, \tag{1.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - (\hat{m}x_i + \hat{b})\right)(-1) = 0. \tag{1.35}$$

Átrendezve (1.34)-ből és (1.35)-ből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{m}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1.36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{m}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}n. \tag{1.37}$$

A keresett két paraméter ebből az egyenletrendszerből a mért x_i, y_i értékekkel kifejezhető.

Számolásra alkalmasabb és áttekinthetőbb formulát kapunk, ha bevezetjük a következő új változókat:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \tag{1.38}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \tag{1.39}$$

Ezekkel kifejezve a két keresett mennyiséget:

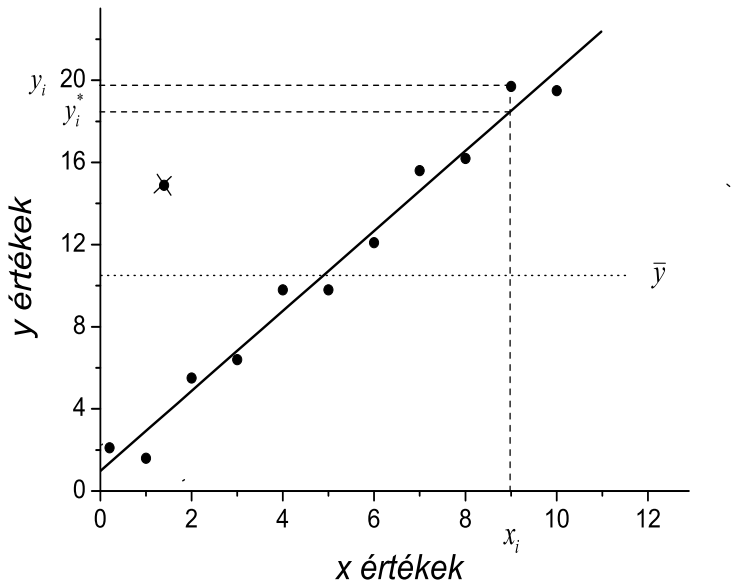
$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}, \tag{1.40}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \quad . \tag{1.41}$$

A második deriváltakkal belátható, hogy az így kapott $\hat{m}$ és $\hat{b}$ értékeknél $S(\hat{m}, \hat{b})$-nak minimuma van.

Az 1.3. ábrán az (1.40) és (1.41) paraméterekkel húzott egyenest ábrázoltuk. Ezt az egyenest *regressziós egyenesnek* is szokták nevezni, az eljárást pedig *lineáris regressziónak*.

Ha az y_i értékek s^2 empirikus szórásnégyzete valahonnan ismert (például onnan, hogy egy pontban sokszor mértünk, és a (1.4) kifejezés alapján meghatároztuk az empirikus



1.3. ábra. A legkisebb négyzetek módszerével kapott regressziós egyenes

szórást), akkor a hibaterjedés törvényei alapján (1.40)-ből és (1.41)-ből egyszerű számolással kiszámolhatjuk az $\hat{m}$ és $\hat{b}$ számított értékek szórásnégyzetét:

$$s_{\hat{m}}^2 = \frac{s^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}, \tag{1.42}$$

$$s_{\hat{b}}^2 = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \right). \tag{1.43}$$

A meredekséget tehát úgy adjuk meg, hogy

$$m = \hat{m} \pm s_{\hat{m}}, \tag{1.44}$$

a tengelymetszetet pedig úgy, hogy

$$b = \hat{b} \pm s_{\hat{b}}. \tag{1.45}$$

Ha az y_i mérési pontok s szórása nem ismert, akkor ennek jó közelítése az

$$s_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2}{n-2}, \tag{1.46}$$

a különböző x_i pontokban mért y_i étékek alapján számolt ún. *reziduális szórásnégyzet*. A nevezőben itt azért szerepel *n-2*, mert a számlálóban szereplő n darab különbségnégyzet nem mind független, közöttük az (1.34) és az (1.35) két egyenlet kapcsolatot teremt. A független adatok száma *n-2*.

A számítógépes programok, amelyek a legkisebb négyzetek módszerével illesztenek regressziós egyenest, az (1.40)–(1.46) kifejezések alapján számolnak.

1.2.12. Súlyozott legkisebb négyzetek módszere

Van olyan eset, amikor nem teljesül az a feltétel, hogy minden x_i pontban azonos az y_i mérési adatok szórása, azaz s nem állandó. Ilyenkor az (1.32) összegben szereplő tagokat különböző súlyfaktorokkal vesszük figyelembe az illeszkedő egyenes paramétereinek számításához. A nagy szórású pontokat kis súllyal, a kis szórású pontokat pedig nagy súllyal szerepeltetjük az összegben:

$$S(\hat{m}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - (\hat{m} x_i + \hat{b}) \right)^2, \tag{1.47}$$

ahol w_i-k a súlyfaktorok. A matematikai statisztika szerint a súlyfaktorok legjobb választása:

$$w_i = \frac{1}{s_i^2}. \tag{1.48}$$

Van a súlyozásnak egy szokásos, hétköznapi változata. Előfordul, hogy a műszer mutatta értéket elnézzük, vagy az adat lejegyzésekor hibát követünk el. Ilyenkor az ábrázolás során a többi pont menetétől durván eltérő, kiugró pontot kapunk. Ha ezt a pontot is figyelembe vennénk a többihez hasonló nagy súllyal, akkor az erősen módosítaná az illesztett egyenes menetét. Ilyen nyilvánvaló esetben a súlyozás azt jelenti, hogy ezt a pontot elhagyjuk az illesztés során, ahogyan azt az 1.3. ábra esetében is tettük a kiugró ponttal.

1.2.13. Nem-lineáris paraméterbecslés

A legkisebb négyzetek módszere akkor is alkalmazható, ha az x és y változók között nem lineáris a kapcsolat. Ilyenkor azonban az (1.33) típusú feltételek általában nem lineáris egyenletrendszerre vezetnek. A számítógépes nem-lineáris illesztő programok ilyen összefüggések alapján működnek.

Nem feltétlenül kell azonban a nem-lineáris esetben ezt az eljárást követni. Van mód arra, hogy a nem-lineáris kifejezést lineárissá alakítsuk. Legyen például a függvény

$$y = ae^{bx} \tag{1.49}$$

alakú! Az (1.49) összefüggés mindkét oldalának logaritmusát véve

$$\ln y = \ln a + bx \tag{1.50}$$

lineáris kifejezésre jutunk, amelynek paraméterei a lineáris regresszióval becsülhetők. Meg kell azonban jegyezni, hogy az így kapott értékek csak első közelítésnek tekinthetők. Az eredeti mérési hibák, amelyek esetleg egyenlők voltak, a transzformáció során különbözőkké válhatnak. Az így kapott paraméterek torzítottak lehetnek, és hibáikról is csak gondos analízist követően lehet nyilatkozni. Ilyenkor például indokolt lehet a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása.

1.2.14. Az illesztés jósága

A görbeillesztéssel kapcsolatban egy másik kérdés is felmerülhet, nevezetesen az, hogy helyes volt-e a feltevés az illesztendő görbe jellegét illetően. Másképpen fogalmazva valóban egyenest kellett-e illeszteni a mérési pontokra, vagy valamely másik függvény jobban leírta volna a mérési pontok menetét. A lineáris regresszió jóságát szokás az r korrelációs együtthatóval jellemezni:

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}. \tag{1.51}$$

Belátható, hogy $|r| \leq 1$, és hogy r előjele megegyezik az illesztett egyenes meredekségével. Ha a mért pontok mindegyike pontosan az egyenesen van, akkor $|r| = 1$. Egyhez közeli r érték (pl. 0,999; 0,980 stb.) jó illeszkedésnek számít, és azt jelenti, hogy a linearitásra vonatkozó feltevés helyes volt. Mennél inkább eltér a szóró pontok menete az egyenestől, annál kisebb r értéke. Nem túl érzékeny mutató. Egészen rossz illeszkedés esetén is nagyobb lehet *0,9*-nél. A számítógépes illesztő programok sokszor r értékét is megadják. Fontos tudnunk, hogy ezt az értéket mérési hibaként nem adhatjuk meg. Megjegyzendő, hogy a regresszió vizsgálatára a matematikai statisztika ennél jobb *próbákat* is kínál.

1.2.15. Példa a hibaszámításra

Összefoglalásképpen a lehajlásmérés példája segíti a hibaszámítással kapcsolatban mondottak megértését. Kör keresztmetszetű rúd esetén az s lehajlás és az F deformáló erő

között a mérés leírása szerint az alábbi összefüggés érvényes:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}F, \tag{1.52}$$

ahol l a rúd hossza, E a Young-modulusza. I az R sugarú keresztmetszet másodrendű felületi nyomatéka:

$$I = \frac{\pi}{4}R^4.$$

A mérés során az F erő függvényében mérjük az s lehajlást. Az F értékek pontosnak tekinthetők (legfeljebb szisztematikus hiba terhelheti), ezért ez kerül a vízszintes tengelyre. A mérést legalább *10* különböző erőérték esetén elvégezzük, és a legkisebb négyzetek módszerével regressziós egyenest illesztünk a mérési pontokra. A számítógépes illesztő programmal meghatározzuk a regressziós egyenes m meredekségét és ennek Δm hibáját. A meredekség (1.52)-ből kifejezve:

$$m = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}.$$

Innen kifejezve E-t:

$$E = \frac{1}{48}\frac{l^3}{mI}.$$

A hibaterjedés az egyszerűbb (1.26) kifejezése alapján a Young-modulusz mérésének relatív hibája:

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(3\frac{\Delta l}{l}\right) + \left(\frac{\Delta m}{m}\right) + \left(4\frac{\Delta R}{R}\right). \tag{1.53}$$

A hossz mérését a berendezéshez rögzített skálával végezzük. Ez a skála mm beosztású, a leolvasási hiba tehát $\pm 0,05\ cm$. A hosszat így adhatjuk meg:

$$l = (30,00 \pm 0,05)\ cm, vagy\ l = 30,00\ cm \pm 0,2\%.$$

Az illesztésből kapott meredekség értéke:

$$m = (3,85 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}\ \frac{cm}{N},\ vagy\ m = 3,85 \cdot 10^{-3}\ \frac{cm}{N} \pm 0,3\%.$$

az (1.53)-ból látszik, hogy a rúd sugarának (átmérőjének) mérésére különös gondot kell fordítani, hiszen relatív hibája négyszeres szorzóval szerepel. Az átmérő (D) mérésére két eszköz jöhet szóba. Vagy tolómérővel, vagy csavarmikrométerrel mérünk. Ha a

ci	D_i [mm]	$\Delta D_i = D_i - \bar{D}$[mm]	$(\Delta D_i)^2 10^{-5}$[mm^2]
1	$6{,}96_5$	-0,0057	3,249
2	$6{,}97_3$	0,0023	0,529
3	$6{,}97_0$	-0,0007	0,049
4	$6{,}97_5$	0,0043	1,849
5	$6{,}96_4$	-0,0067	4,489
6	$6{,}97_5$	0,0043	1,849
7	$6{,}98_5$	0,0143	20,449
8	$6{,}97_2$	0,0013	0,169
9	$6{,}96_0$	-0,0107	11,449
10	$6{,}96_8$	-0,0027	0,729
	$\bar{D} = 6,9707$	$\sum_{i=1}^{10} \Delta D_i = 0$	$s_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta D_i)^2}{n(n-1)}} = 0{,}00223$

1.1. táblázat.

tolómérőt választjuk, és a hossz mentén több helyen megmérjük a rúd átmérőjét, akkor észrevesszük, hogy a pontos megmunkálás eredményeként azonos értékeket mérünk, vagyis a mérés hibája a leolvasás hibájával egyezik, azaz:

$$\Delta D = (6,95 \pm 0,05)\ mm,\ \ vagy\ \Delta D = 6,95\ mm \pm 0,7\%.$$

A hossz mentén csavarmikrométerrel mérve az átmérőt, az egyes mérések során különböző értékeket kapunk. A mérési eredményeket az 1.1. táblázat második oszlopa tartalmazza. A mérés negyedik jegye becsült érték, ilyenkor azt célszerű kisebb számmal jelölni.

Az (1.5) kifejezés alapján kiszámítjuk az átmérő hibáját:

$$\Delta D = s_{\bar{D}} = 0,002\ mm.$$

Az átmérő mért értéke tehát:

$$D = (6,971 \pm 0,002)\ mm,\ \ vagy\ D = 6,971\ mm \pm 0,02\%.$$

A sugár mért értéke:

$$R = (3,486 \pm 0,001)\ mm,\ \ vagy\ R = 3,486\ mm \pm 0,02\%.$$

Megéri tehát a pontosabb mérés, hiszen *0,7%* helyett *0,02%*-os hibát kaptunk, és ezzel lényegesen csökkentettük a végeredmény hibáját.

Megjegyezzük, hogy ha az egyszerűbb (1.2) kifejezés alapján számoljuk az abszolút hibát, akkor $\Delta D = 0,005\ mm$-t kapunk. Látható, hogy ez az érték bár nagyobb, de nagyságrendileg megegyezik $s_{\bar{D}}$ értékével, ezért sokszor megelégszünk az egyszerűbb abszolút hiba megadásával.

Most maradva a pontosabb érték használata mellett, a Young-modulusz mérés relatív hibája:

$$\frac{\Delta E}{E} = 3 \cdot 0,002 + 0,003 + 4 \cdot 0,0002 = 0,00638.$$

Az eredményt így írjuk fel:

$$E = (7,11 \pm 0,05) \cdot 10^{10}\ \frac{N}{m^2},\ \ vagy\ E = 7,11 \cdot 10^{10}\ \frac{N}{m^2} \pm 0,6\%.$$

Megjegyzés: ha a pontosabb (1.5) kifejezés alapján számoljuk a statisztikus hibát, a számolásokat általában nem kell az 1.1. táblázatban bemutatott részletességgel elvégezni. A jobb kalkulátorok ugyanis az *átlag*, az *empirikus szórás* és az *átlag empirikus szórása* értékeket közvetlenül számolják. A matematikai statisztika függvényeit a *Microsoft Excel* program is tartalmazza.