

1. ATOMOK A TERMÉSZETBEN

1.1. Az anyag atomos felépítése

- 1. Korai elképzelések az anyag szerkezetéről*
- 2. Az elemi töltés*
- 3. Az elektron fajlagos töltése*
- 4. Az Avogadro-szám*
- 5. Az atomok tömege*
- 6. Elemi folyamatok, hatáskeresztmetszet*
- 7. A Rutherford-kísérlet*
- 8. Az atomok mérete*

1.2. AZ INGADOZÁSI JELENSÉGEK

- 1. A Brown-mozgás*
- 2. A sörétzaj*
- 3. Sűrűségingadozások gázokban*
- 4. Fényszórás gázokban*
- 5. A kinetikus gázelmélet elvi alapjai*

1.3. ATOMOK ELEKROMÁGNESES VÁLASZAI

- 1. Gázok abszorpciós spektrumai*
- 2. Gázok emissziós spektrumai*

1.4. ATOMI ENERGIAÁLLAPOTOK

- 1. A fotoelktromos jel. szabad atomon*
- 2. Atom – elektron ütközések*
- 3. Az atomok energiaszintjei*

1. Korai elképzelések az anyag szerkezetéről

• Elektrolízis (M. Faraday [1791-1867])

Faraday törvénye (1833)

$$Q = n \cdot \frac{F}{M} \cdot m$$

m → kivált tömeg

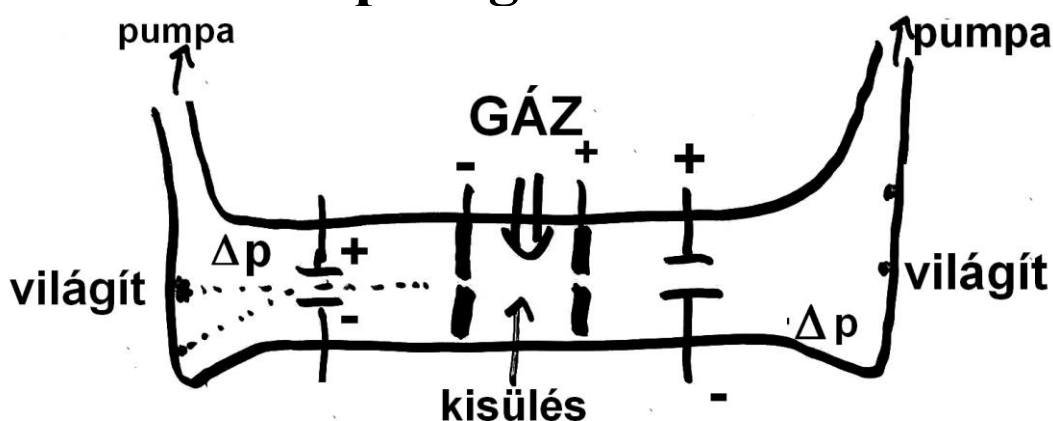
M → mólsúly

n → egész szám

F=9.649 · 10⁴ Cb/mol (~27 A·óra/mol)

→ Atom (mol.): néhány alternatív töltés

• Töltéstranszport gázokban



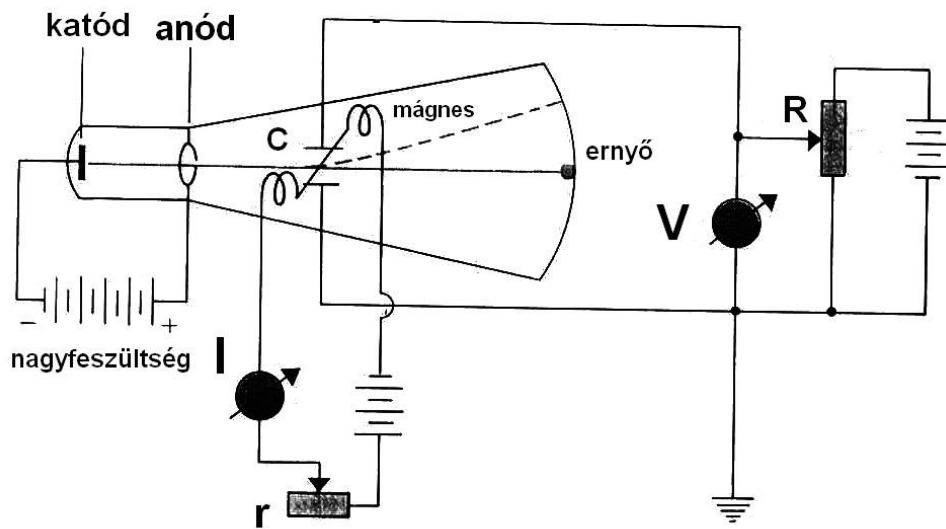
A töltött részecskék tanulmányozásából:

- e/m (fajlagos töltés) meghatározása (J.J. Thomson),
- tömegspektroszkópia alapjai (a töltést tudjuk),
- izotópok felfedezése.

Negatív töltésű sugarak tanulmányozása:

- komplex keverék (el., negatív ionok)

- 10^{-5} torr alatt: nagy fajlagos töltésű nyaláb
- **Katódsugarak (Joseph John Thomson, [1856–1940], Nobel-díj: 1906) 1896**



→ a vákuumban is van el. vezetés
 e/m nem függ a jelenlévő anyagtól
 → elektronok (1897)

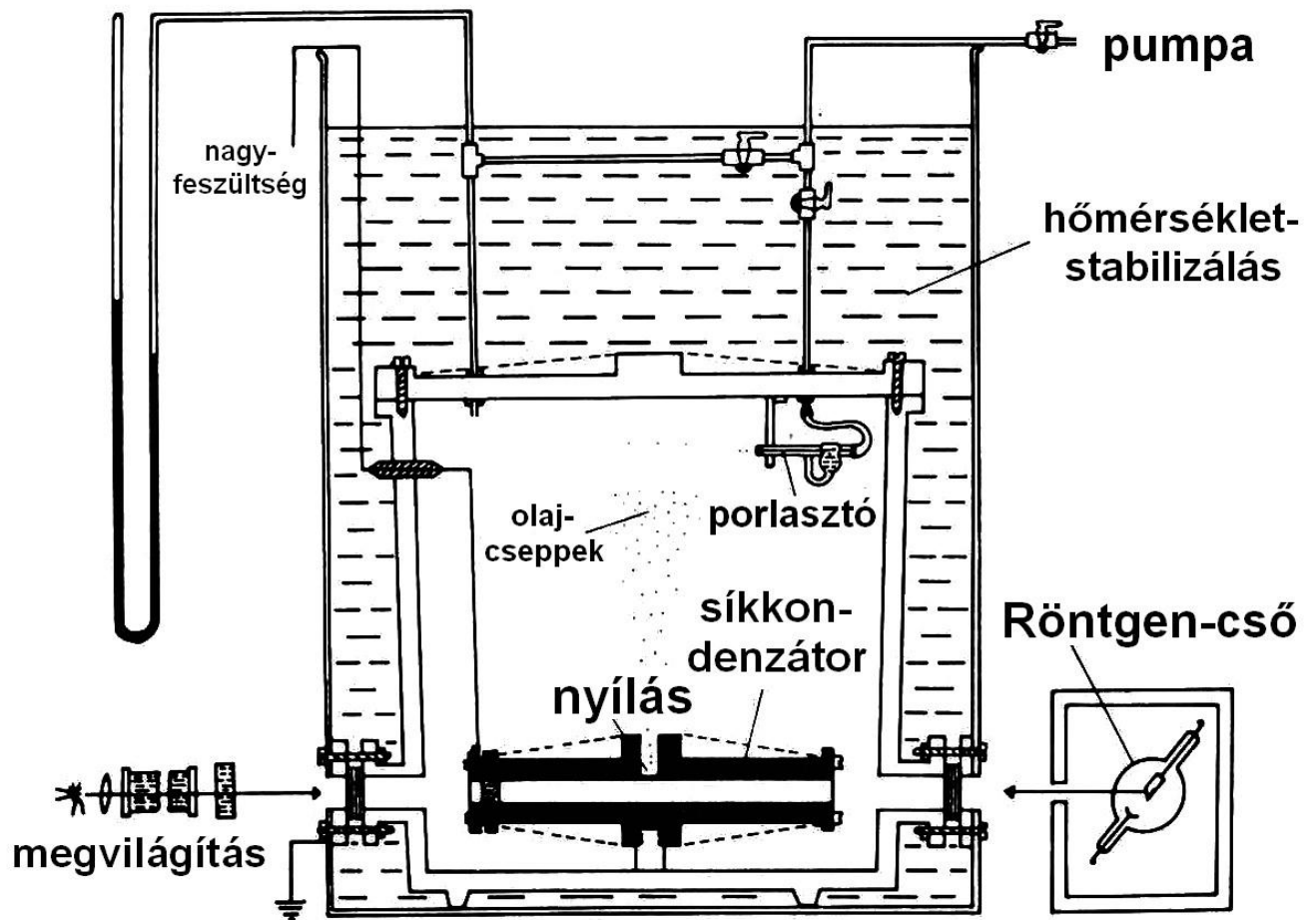
Elektrolízis: atomok, molekulák mindkét polaritással,

Gázkisülés: pozitív ion, negatív elektron

Elképzelés → pozitív és negatív töltések egysége az atom

→ a poz. töltés hordozza a tömeg jel. részét
Első atommod.: el. mazsolák poz. gömbben

2. Az elemi töltés



**Robert Andrews Millikan [1868–1953,
Nobel-díj 1923], Phys. Rev. 2(1913)109**

**Megfigyelt mennyiség: olajcsepp sebessége
tér nélkül; $\eta \rightarrow$ belső súrlódási együttható**

$$m \cdot g = \frac{4 \cdot \pi \cdot r_0^3}{3} (\rho_{\text{olaj}} - \rho_{\text{levegő}}) \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r_0 \cdot v_0$$

Térrel:

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r_0^3}{3} (\rho_{\text{olaj}} - \rho_{\text{levegő}}) \cdot g \pm Q \cdot |E| = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r_0 \cdot v_{\pm}$$

$$\rightarrow Q = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r_0 \cdot (v - v_0)$$

Mérendők: v-k, csepp szabadeséséből r_0 meghatározható, ismert η és $\underline{E}$.

Millikan: $\sim 1\%$ pontosság.

$$Q = n \cdot e \rightarrow n \text{ egész szám}$$

Az elemi töltés értéke:

$$e = (1.602\,177\,33 \pm 0.000\,000\,48) \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$$

(Természeti állandók ismerete: több különböző mérésekből, belső konzisztencia megkövetelésével adódnak.)

A természetben e és egész számú többszörösei figyelhetők meg.

3. Az elektron fajlagos töltése

J.J. Thomson [1856-1940], (1897)

Ilyen típusú méréseknél a lényeg:

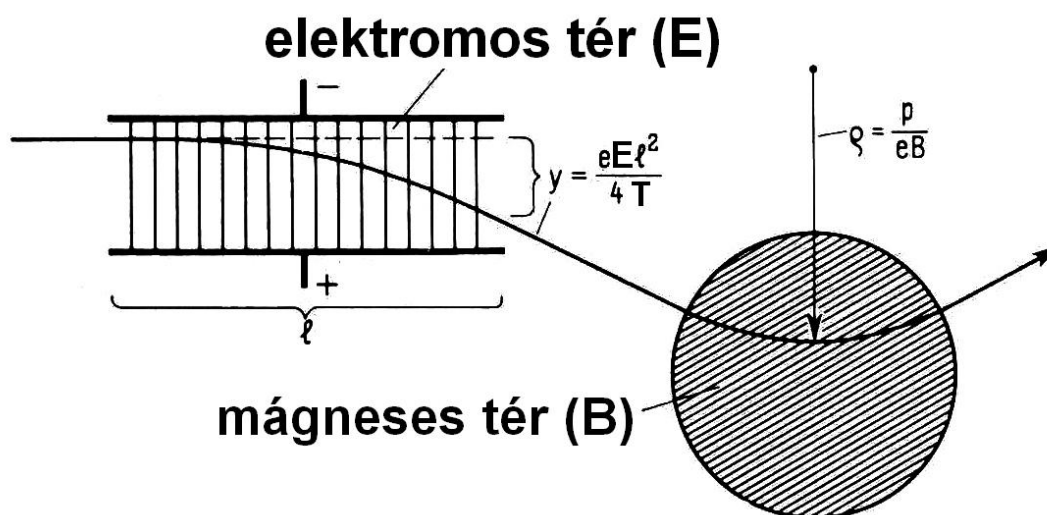
elektromos és mágneses terek egyidejű alkalmazása

Elektromos tér: eltérülés kin. energiától függ

Mágneses tér: görbületi sugár a lendülettől (az impulzustól) függ

Mérésből $\rightarrow$ töltés/tömeg (e/m) adódik

Vázlatos tárgyalás:



$$\underline{m} \cdot \underline{a} = -e (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

Elektromos térben:

$$\underline{a} = \underline{v}' = \frac{e}{m} \cdot \underline{E}; t = \frac{l}{v}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{e}{2 \cdot m} \cdot E \cdot \frac{l^2}{v^2} = \frac{e \cdot E \cdot l^2}{4 \cdot T}; T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

innen

$$T = \frac{E \cdot e \cdot l^2}{4 \cdot y}$$

Mágneses térben:

$$\frac{m \cdot v^2}{\rho} = e \cdot |\underline{v} \times \underline{B}|; m \cdot v = p = e \cdot B \cdot \rho$$

ρ és y mérésével:

$$m = \frac{p^2}{2 \cdot T} = \frac{(e \cdot \rho \cdot B)^2}{2 \cdot \left(\frac{E \cdot e \cdot l^2}{4 \cdot y} \right)} = \frac{2 \cdot e \cdot B^2 \cdot \rho^2 \cdot y}{E \cdot l^2}$$

Ezekből $\rightarrow \frac{e}{m} = \frac{E \cdot l^2}{2 \cdot B^2 \cdot \rho^2 \cdot y}$

A kísérletező a tereket megválaszthatja
→ e/m , tömegspektrométerek, gyorsítók
Thomson: kondenzátor + merőleges mágn.
tér → egyikkel kompenzálta a másikat
Eredmény → e/m függ a sebességtől
 e nem → **m függ a sebességtől**

$$m_e = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \beta = \frac{v}{c}$$

Walter Kaufmann [1871-1947], (1902),
elektronok radioaktív preparátumokból
Ma: $e/m_0 = 1.758\,804\,47(49) \cdot 10^{11}$ Cb/kg
nyug. tömeg: $m_0 = 0.910\,953\,4(47) \cdot 10^{-30}$ kg

4. Az Avogadro-szám (Loschmidt-szám)

Amadeo Avogadro [1776-1856]

Joseph Loschmidt [1821-1895] (1865)

$$N_A = F/e$$

Módszerek: rtg. diffrakcióból atomtávolság,
sűrűség, relatív atomtömeg

$$\text{Ma: } N_A = 6.022\,136\,7(31) \cdot 10^{23}/\text{mol}$$

Loschmidt-konstans: normál állapotú

ideális gáz molekuláinak száma 1m^3 -ben

$$N_A \text{ segítségével: } n_0 = 2.686\,763 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

5. Az atomok tömege

- relatív atomtömegek: kémiai reakciókból

Egység: ^{12}C atom 12-ed része

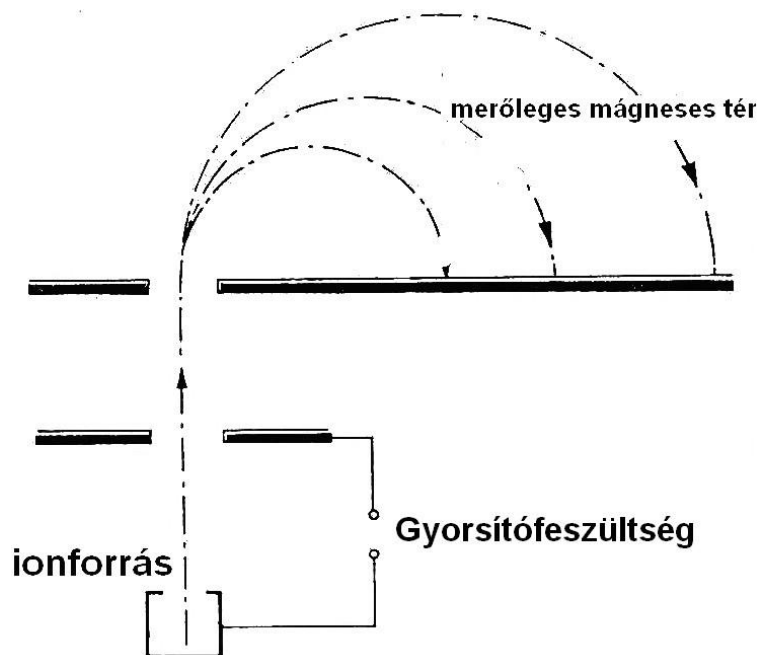
$$M_{\text{C}^{12}} \cdot \frac{1}{12} = 1\text{AMU} = 1.6605655(36) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$= 931.481 \text{ MeV}/c^2 = 1822.84 m_0(\text{el.})$$

- abszolút atomtömegek
meghatározás: tömeg-spektrográfokkal
→ elektromos és mágneses terekkel
kiváltott elhajlások vizsgálata

Alapprobléma: intenzitás és felbontás
között kell kompromisszumot kötni.

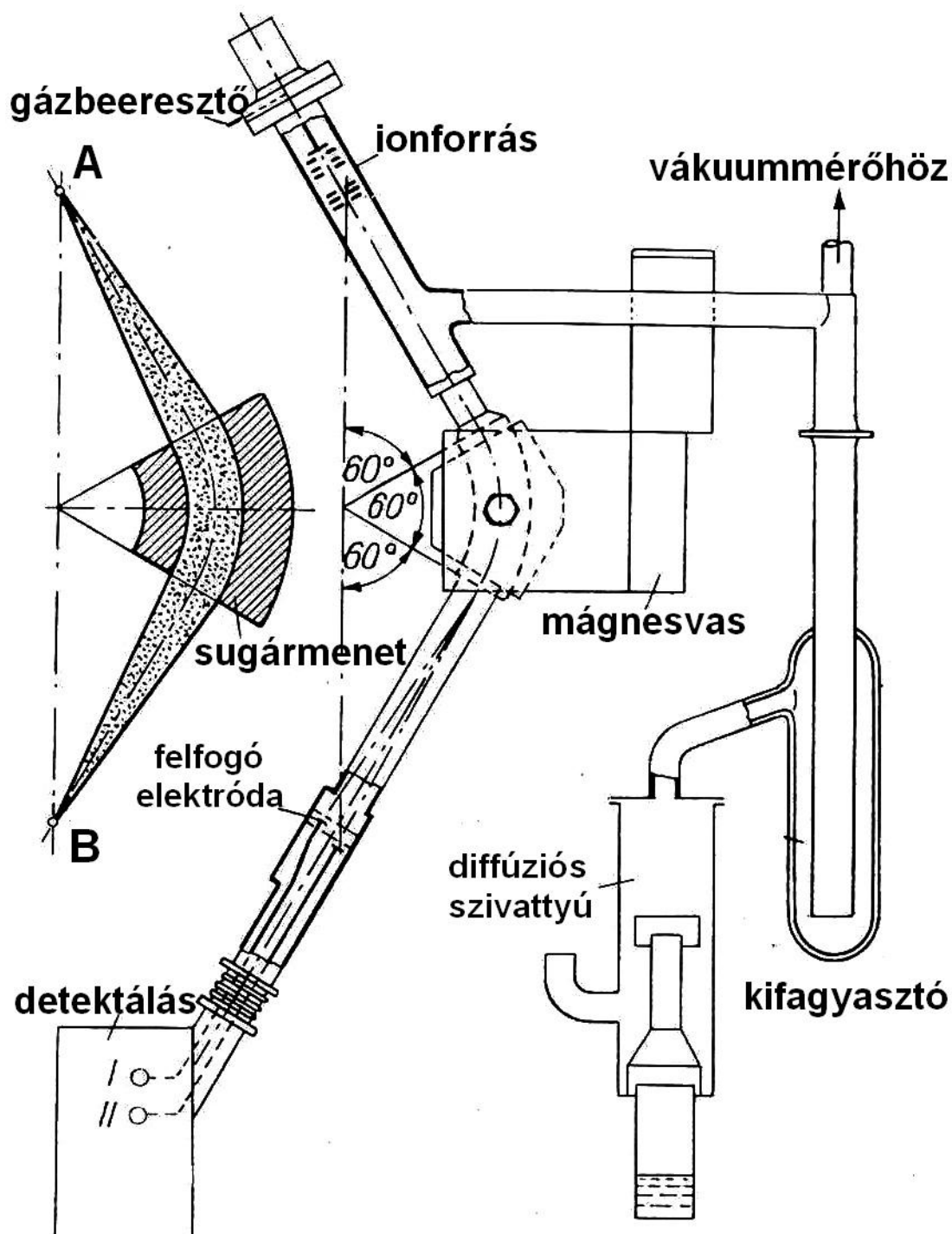
Elvileg: gyorsítás el. térrel + mágneses
térrel elhajlítás



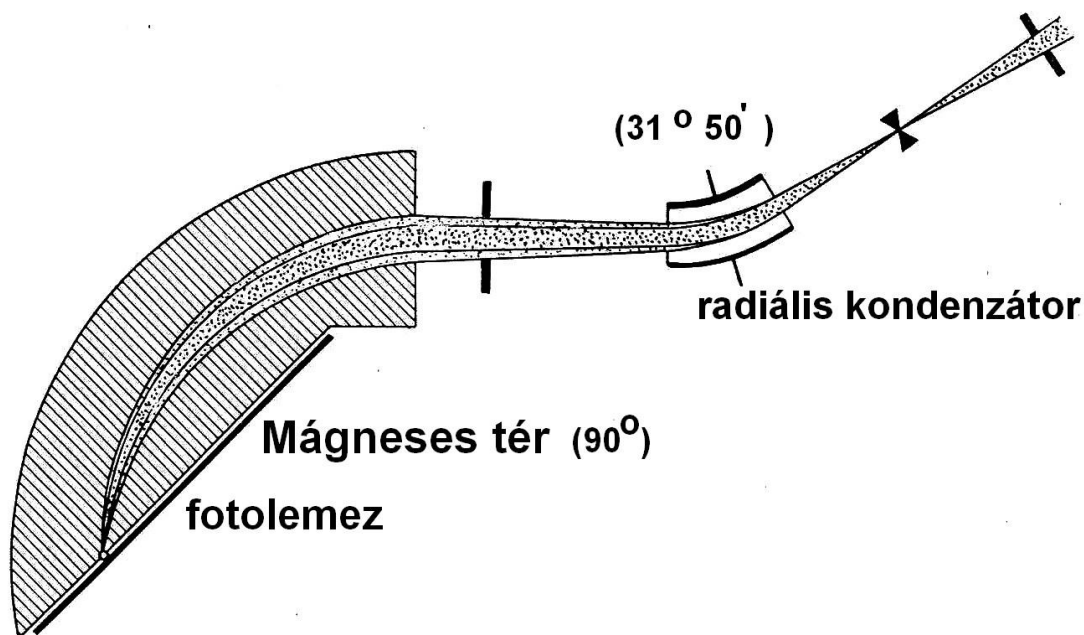
$$p = q \cdot B \cdot \rho$$

Önálló, alkalmazott tudományterület.

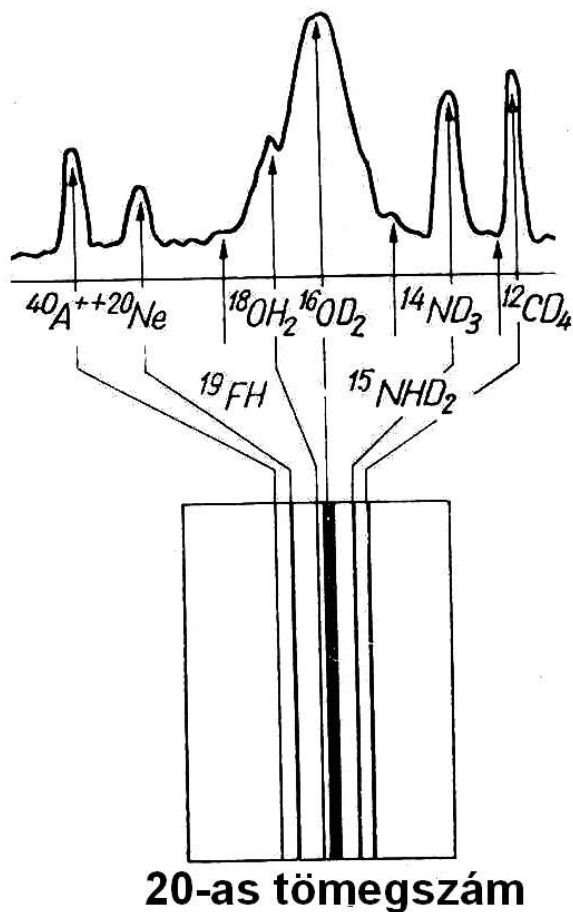
**Sok különböző tömeg-spektrométer: kül.
ionforrások, ionoptikai megoldások,
lényeg: fókusz irány és sebesség szerint
Nier-féle tömegspektrográf: irányfókusz**



Mattauch-féle tömegspektrográf: kettős fókuszálás (irány és sebesség szerint)

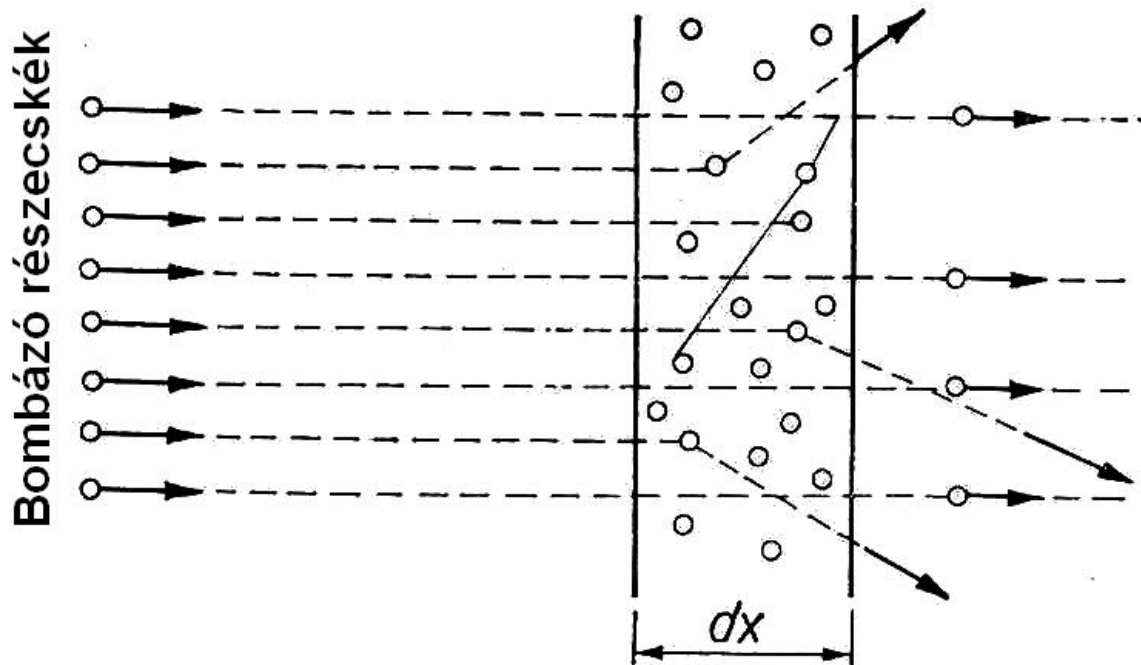


Jellegzetes tömegspektrum



6. Elemi folyamatok. A hatáskeresztmetszet.

Elemi folyamat: csak két részecske vesz részt benne → a bekövetkezés valószínűsége arányos az ott lévő entitások számával



$$n = \sigma \cdot N \cdot \rho \cdot dx$$

ρ sűrűség (atom/cm³)

Kiszámítás:

$$\frac{M}{d(\text{g/cm}^3)} \quad \frac{6 \cdot 10^{23}}{X}$$

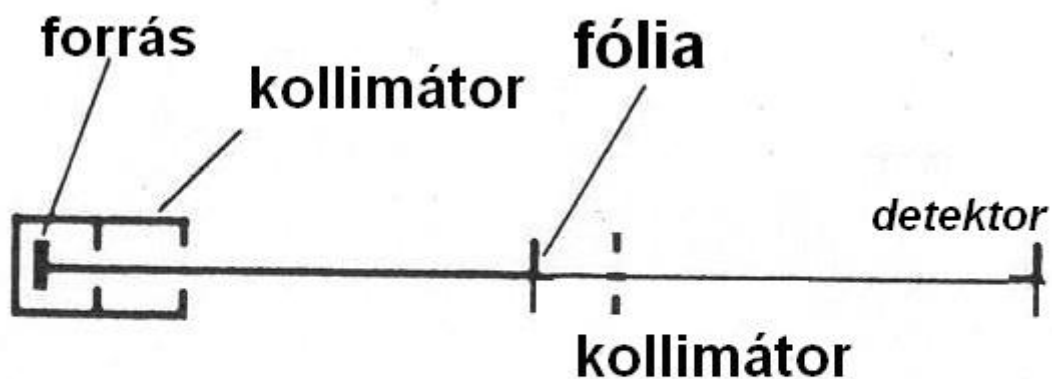
Differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\Omega} \left(\frac{\text{barn}}{\text{str}} \right) \quad \Omega = \frac{A}{r^2}$$

Totális hat. ker., parciális hat. ker. metszet

A mikrofizikai mérések leggyak. eredménye

Példa: fólián való intenzitáscsökkenés



$$dN = - N \cdot \sigma \cdot \rho \cdot dx \rightarrow N(x) = N_0 \cdot \exp(-\sigma \cdot \rho \cdot x)$$

Teszt: ha igaz, akkor ez elemi folyamat

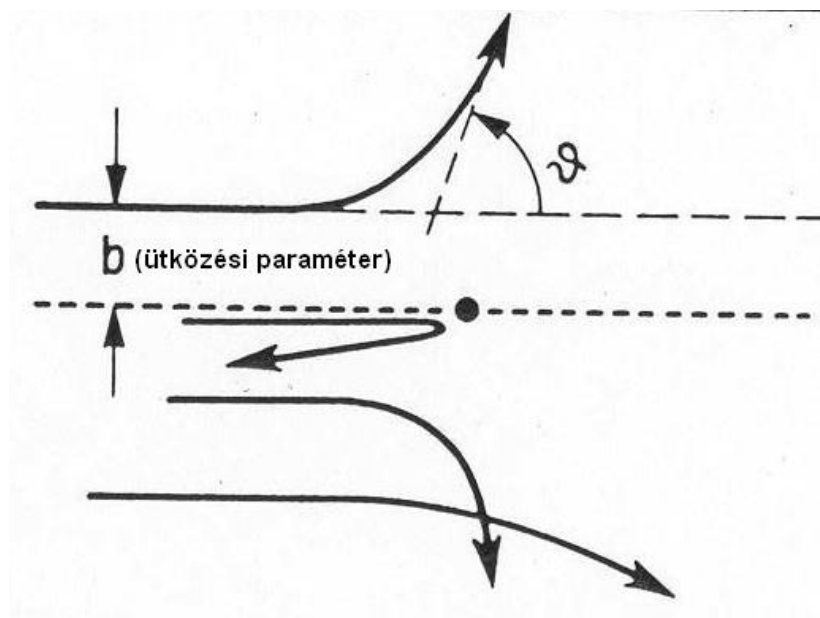
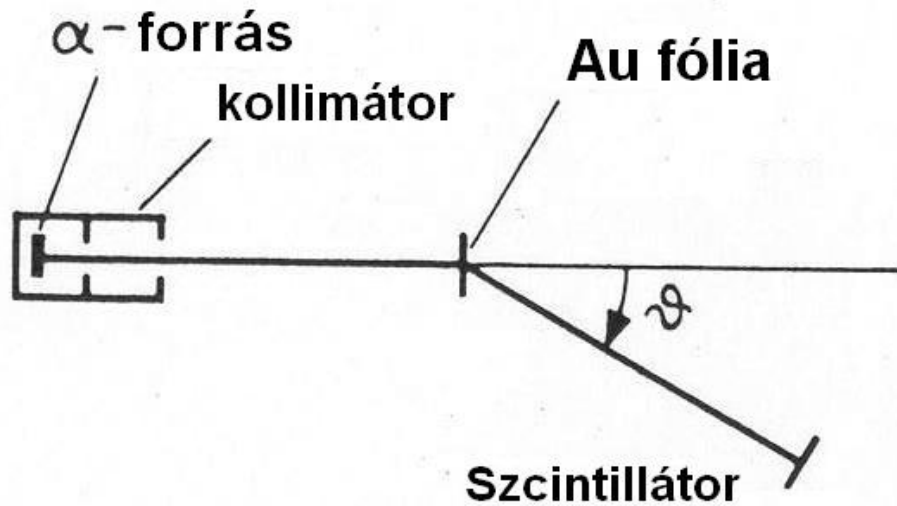
→ elemi folyamat

Tapasztalat: elemi folyamat megfigyelhető

→ az egyedi események valósak

7. A Rutherford-kísérlet

*Ernest Rutherford (1871-1937), 1911
munkatársai: H. Geiger és R. Mardsen*

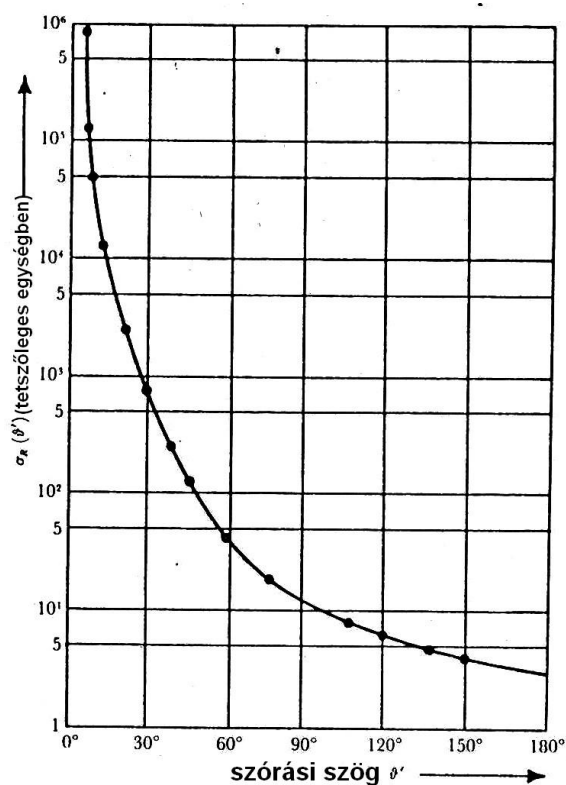
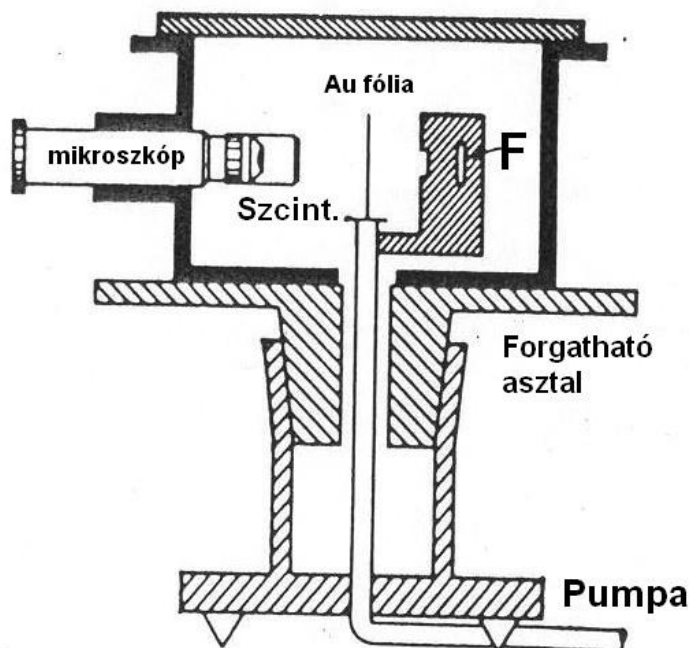


$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4 \cdot E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

**ha pontszerű a
mag**

Kís.: Rutherford, Geiger és Mardsen, 1913

Kísérleti berendezés:

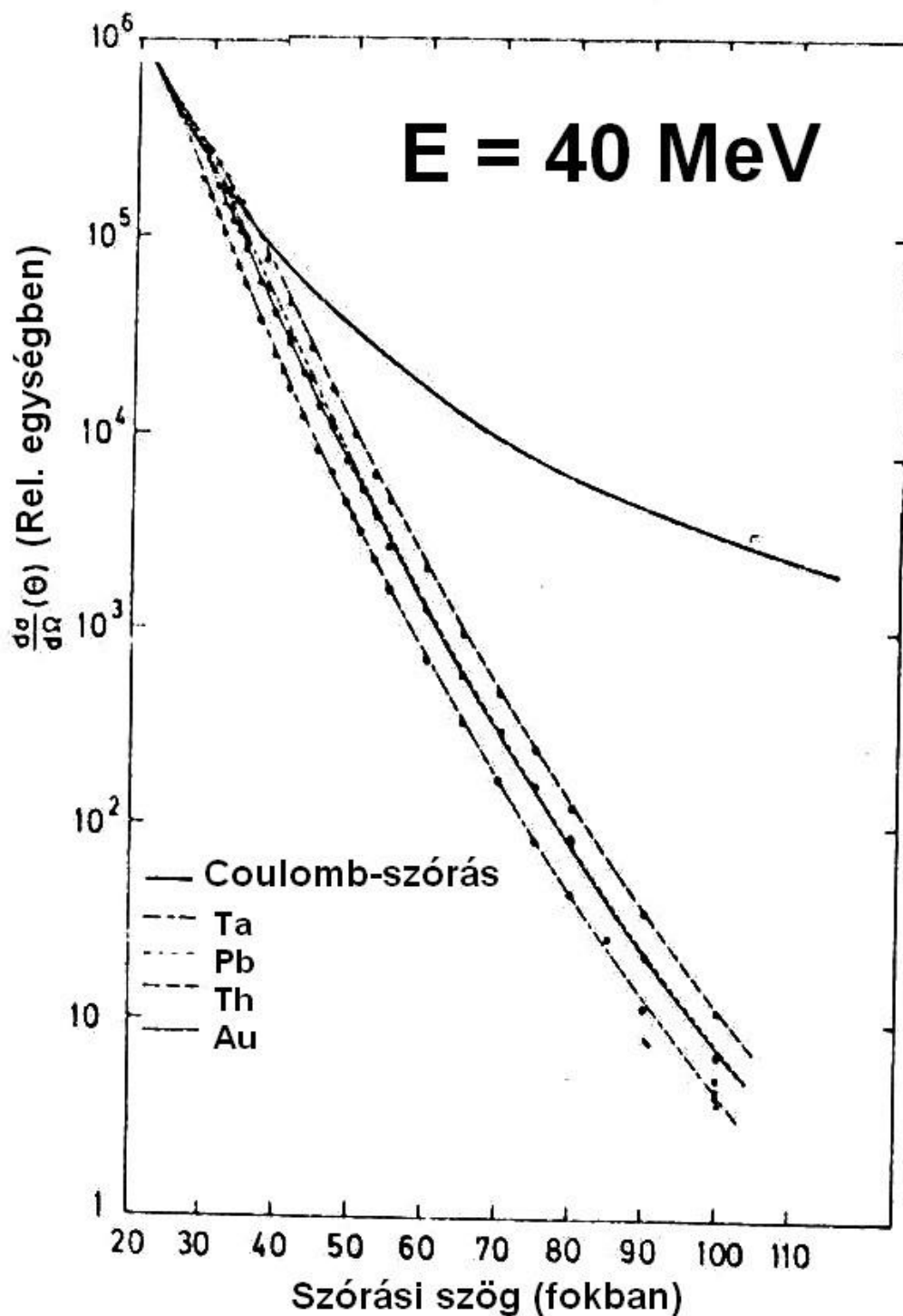


Kihúzott görbe:

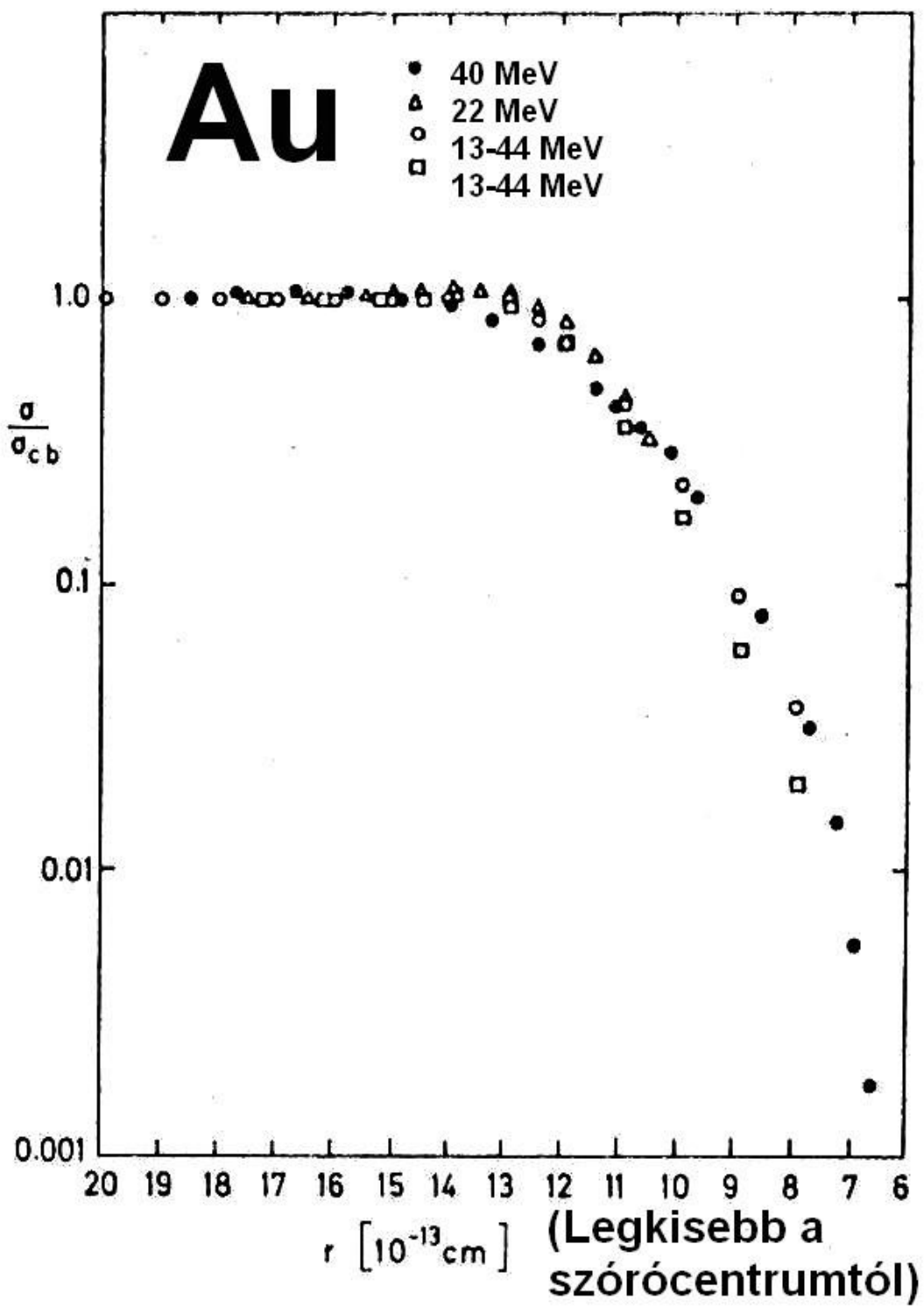
$$\sim 1/\sin^4(\theta/2)$$

Csak a legnagyobb szögekre találtak eltérést

Természetes forrás: α energia 5-7 MeV,
kicsi $\rightarrow$ nem merül bele az atommagba
Gyorsítókkal $\rightarrow$ nagyobb energia



(Wegener et al., 1955)



$$R_{\text{Ható}} + R_{\alpha} + R_{\text{Au}} \approx 13 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

8. Az atomok mérete

→ *elektronfelhő mérete (diffúz)*

Atomtérfogat: jól definiált, megváltoztatni még nagy nyomás alatt is nehéz

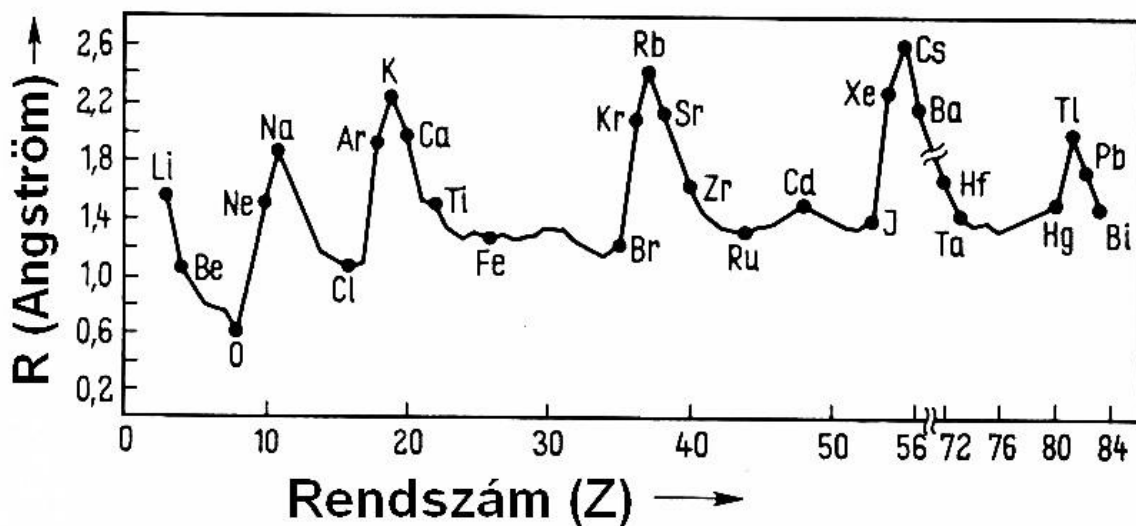
Atomméret meghatározója:

- elektronok széttartanak,
- a mag összehúz

Izoelektronikus sorok → mag összehúz

Pl.:	F^-	1.36 Å	ionos kristályok sűrűsége és szerkezete
	Na^+	0.95 Å	
	Mg^{++}	0.65 Å	
	Al^{+++}	0.5 Å	

Atom sugara; kül. módszerek 25%-ra u.az.



- kevésbé változik,
- H-re is ~ u. az

Rutherford: bolygómodell

→ rossz: méret, stabilitás (alak), sugárzás

1.2 Ingadozási jelenségek

**Nagy terület: statisztikus fizika tárgyalja
Most → atomokból álló rendszerek vizsgál.;
néhány kiválasztott példa**

**Az ingadozási jelenségek fellépte → az
atomos (diszkrét részekből történő)
felépítés következménye.**

1. A Brown-mozgás

Robert Brown [1773-1858], 1827

Virágpor mozgása: élet megnyilvánulása?

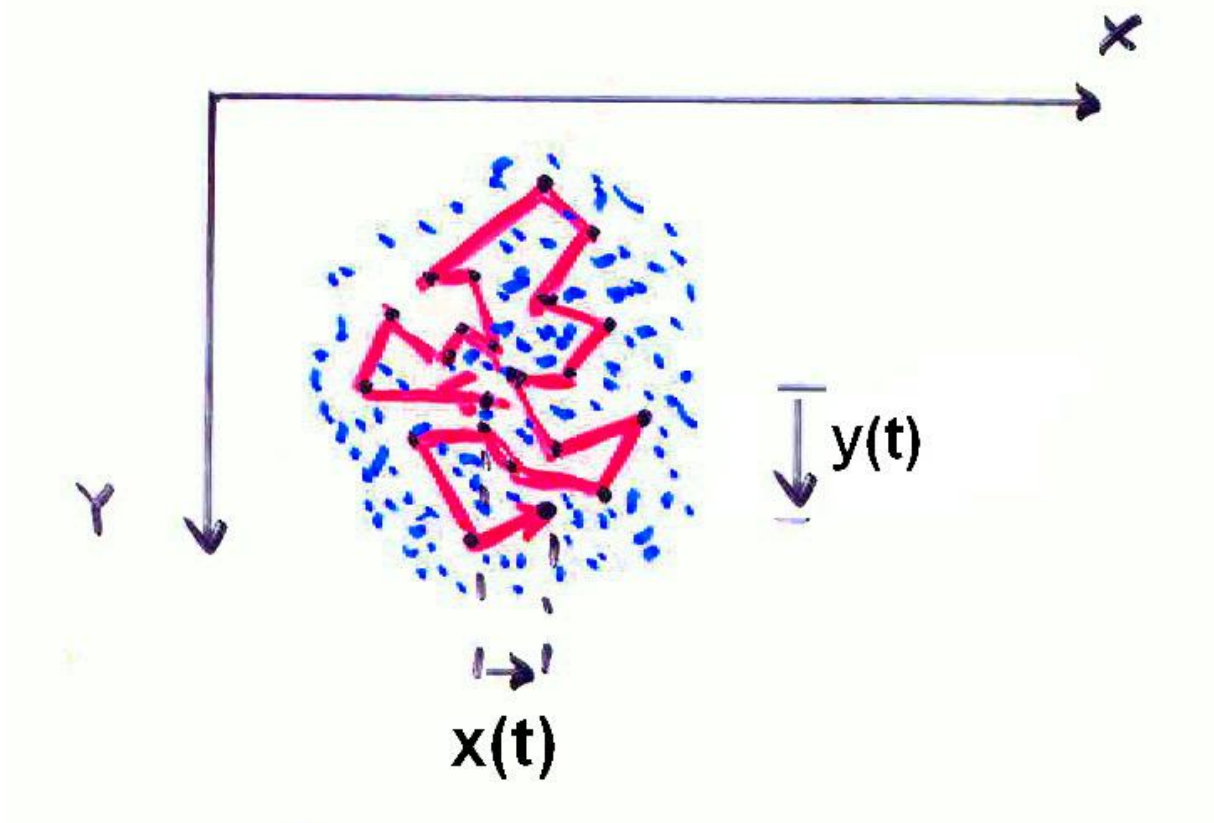
Apró szervetlen részecskék is!

Megfigyelés:

- **a mozgás független az időtől (nem átmeneti jelenség),**
- **független a foly. kémiai összetételétől,**
- **nem a tartóedénytől származik,**
- **a mozgásnak nincs áramlás jellege, rendezetlen,**
- **a nagyobb részecskék mozgása lassúbb,**
- **nagyobb T → hevesebb mozgás,**
- **kisebb viszkozitás → hevesebb mozgás.**

**Teljes magyarázat: A. Einstein és Marion
Smoluchowsky [1872-1917] (1905)**

Mi → Langevin nyomán
(Paul Langevin, [1872-1946])



$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t) - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot \frac{dx}{dt} \quad / 2 \cdot x$$

$$\left[m \cdot x \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(m \cdot \frac{d^2 (x^2)}{dt^2} - 2 \cdot m \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right); x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{dt} \right]$$

$$m \cdot \frac{d^2 (x^2)}{dt^2} - 2 \cdot m \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2 \cdot F_x(t) \cdot x - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot \frac{d(x^2)}{dt}$$

Sok testre megfigyelés: átlagolás

Lényeg: $x(t)$ és $F_x(t)$ korrelálatlan

$$\overline{x \cdot F_x} = 0$$

Átlagolás és differenciálás felcserélhető $\rightarrow$

$$\frac{d^2(\overline{x^2})}{dt^2} + \frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot \frac{d(\overline{x^2})}{dt} = 2 \cdot \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

az ekvipartíció tétele: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d(\overline{x^2})}{dt} \right) + \frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot \left(\frac{d(\overline{x^2})}{dt} \right) = \frac{2}{m} \cdot k \cdot T$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{x^2}) = \frac{2 \cdot k \cdot T}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} + c \cdot \exp\left(-\frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} t\right)$$

ha $\rightarrow t \gg \left(\frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m}\right)^{-1} \rightarrow 0$, akkor

$$\overline{x^2} = \frac{k \cdot T}{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} \cdot t \rightarrow \text{Einstein képlete}$$

Kísérletek: Jean Baptiste PERRIN [1870-1942]; Nobel-díj: 1926

$\rightarrow$ minden a képlet szerint (elmozdulás-négyzetek: tömegfüggetl., időarányos)

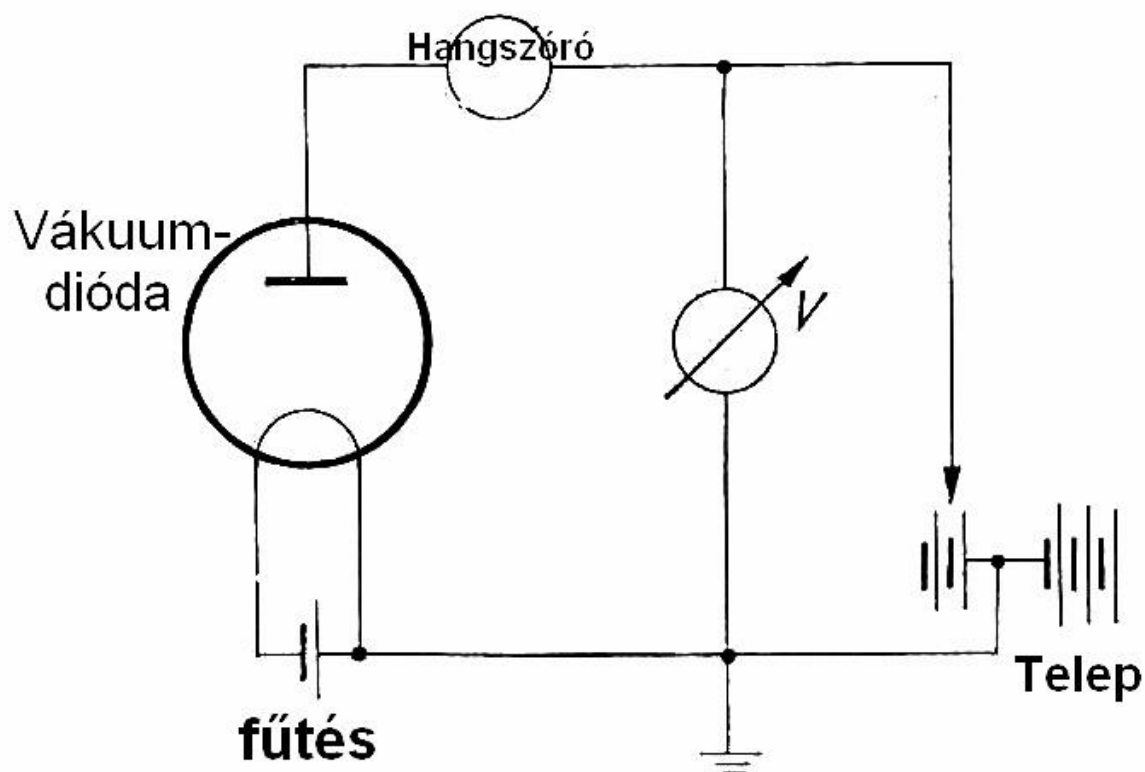
Lényeg: x és F_x függetlenek $\rightarrow$ folytonos eloszlásnál nem lehetséges

r és η ismeretében $\rightarrow$ Avogadro szám (k és R -en keresztül)

Minden részecske így mozog!

2. A sörétzaj

(Walter H. Schottky, [1886-1976], sörétzaj: 1926)



$$I = \frac{e \cdot N}{T}$$

$$\tau \ll T$$

τ idő alatti elektronok száma n

$$(\Delta n)^2 = \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n}^2 - \bar{n}^2$$

$$p = \tau/T; \quad q = 1 - p$$

$W(n) \rightarrow$ val., hogy τ -hoz n tartozzon

$$W(n) = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot q^{N-n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} p^n \cdot (1-p)^{N-n}$$

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^N n \cdot W(n) = \sum_{n=1}^N n \cdot \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} p^n \cdot (1-p)^{N-n} = \\ &= N \cdot p \cdot \sum_{n=1}^N \frac{(N-1)!}{(n-1)! \cdot (N-n)!} \cdot p^{n-1} \cdot q^{N-n} = p \cdot N = N \cdot \frac{\tau}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 &= \sum_{n=0}^N n^2 \cdot W(n) = \sum_{n=1}^N [n \cdot (n-1) \cdot W(n) + n \cdot W(n)] = \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{N!}{(n-2)! \cdot (N-n)!} \cdot p^n \cdot q^{N-n} + \bar{n} = \\ &= p^2 \cdot N \cdot (N-1) \cdot \sum_{n=2}^N \binom{N-2}{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^{N-n} + \bar{n} = p \cdot N + p^2 \cdot N \cdot (N-1) \\ (\Delta n)^2 &= \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = p \cdot N + p^2 \cdot N \cdot (N-1) - p^2 \cdot N^2 = \\ &= N \cdot p \cdot (1-p) = N \cdot p \cdot q \end{aligned}$$

τ idő alatti áramingadozás:

$$\begin{aligned} (\Delta I)^2 &= (I(\tau) - I)^2 = \frac{e^2}{\tau^2} \cdot (\overline{n - \bar{n}})^2 = \\ &= \frac{e^2}{\tau^2} \cdot (\Delta n)^2 = \frac{N \cdot e^2}{\tau \cdot T} - \frac{N \cdot e^2}{T^2} = \frac{e}{\tau} \cdot I \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \\ T \rightarrow \infty &\Rightarrow \Delta I = \sqrt{\frac{e}{\tau} \cdot I} \Rightarrow \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 = \frac{\left(\frac{e}{\tau}\right)}{I} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Kísérlet:

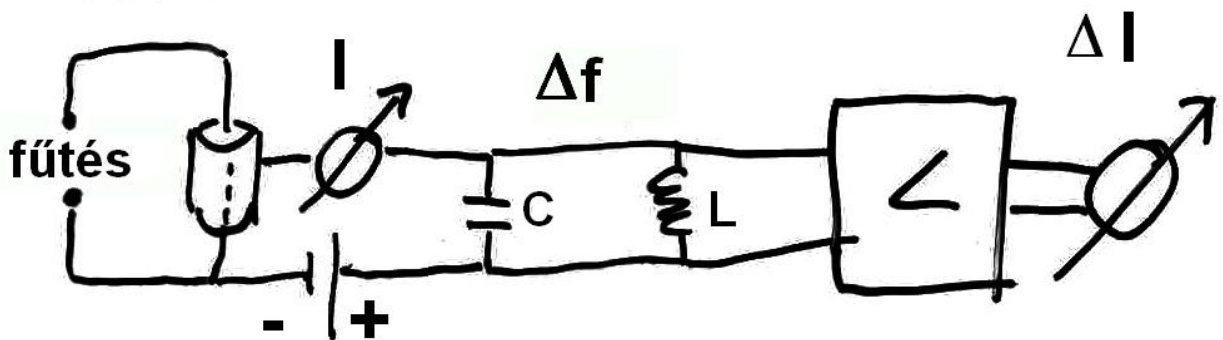
áramingadozások Δf frekv.-tartományban

$$\Delta f = \frac{1}{2 \cdot \tau}$$

$$(\Delta I)^2 = \frac{e}{\tau} \cdot I = 2 \cdot e \cdot I \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \tau} \right) = 2 \cdot e \cdot I \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \tau} \right) = 2 \cdot e \cdot I \cdot \Delta f$$

τ időnkénti mintavétel $\rightarrow \Delta f = 1/(2 \tau)$ frekv.
tartományban hordoz információt a mérés
 $\rightarrow$ az elektron töltése tömegtől függetlenül
meghatározható

Hull és Williams (1926) $\rightarrow e$ meghatározása



Mérendők:

- CL-rendszer frekv.karakterisztikája
- $\Delta I, I$

Független eredmények e -re $\rightarrow$ összhangban
a többi méréssel

3. Sűrűségingadozások (gázok, gőzök)

Gáz N részecskéből, V térfogatban $\rightarrow$

$$\rho = N/V; \text{ jelölés: } p = \Delta V/V; \quad \lambda = N \cdot p = \rho \cdot \Delta V$$

ΔV -ben éppen n részecske: $W(n)$

$$\begin{aligned} W(n) &= \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n} = \\ &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)}{n!} \cdot \frac{\lambda^n}{N^n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^n} = \\ &\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} \right] \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{(\rho \cdot \Delta V)^n}{n!} \cdot e^{-\rho \cdot \Delta V} \end{aligned}$$

Ez a Poisson-eloszlás

Tulajdonságai $\rightarrow$ átlag és szórás

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot W(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda} = \\ &= \lambda \cdot e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \lambda = \rho \cdot \Delta V = N \cdot \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta n)^2 &= \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 = \\
&= \lambda^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \cdot e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \\
&= \lambda = \bar{n} \Rightarrow \frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}
\end{aligned}$$

Ideális gázra, normál állapotban $\rightarrow$

$$\rho = 2.78 \cdot 10^{19} \text{ molekula/cm}^3$$

$$\lambda' \text{ (zöld fény)} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}; n \approx 3.5 \cdot 10^6$$

$$\frac{\Delta n}{n} \approx 0.05\%$$

- **Reális gázok sűrűség-ingadozásai**
Módszer: n mol. által elfoglalt térfogat (V) ingadozásának vizsgálata

$$V_0 = \frac{n}{\rho_0}; p_0 \rightarrow p, V, \rho = n/V$$

$$\varepsilon = \int_{V_0}^V (p_0 - p) dV$$

$f dV \rightarrow n$ mol. térfogata V és $V+dV$ között

$$f dV = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k \cdot T}\right) dV}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k \cdot T}\right) dV}$$

ideális gázra: $p = n \cdot k \cdot T \frac{1}{V}$

$$\varepsilon = - \int_{V_0}^V (p - p_0) dV = - \int_{V_0}^V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{V_0} \cdot (V - V_0) dV =$$

$$= \frac{n \cdot k \cdot T}{2 \cdot V_0^2} (V - V_0)^2$$

$$f = \frac{\exp\left(-\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{V - V_0}{V_0}\right)^2\right)}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{V - V_0}{V_0}\right)^2\right) dV}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^2 = \frac{\left(\frac{n}{V_0^2} dV \right)^2}{\left(\frac{n}{V_0} \right)^2} = \left(\frac{dV}{V_0} \right)^2$$

$$x = \frac{dV}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} = \frac{\int_0^\infty x^2 \cdot f dx}{\int_0^\infty f dx} = \frac{\int \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)^2 \cdot \exp \left(-\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)^2 dV \right)}{\int \exp \left(-\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)^2 dV \right)} =$$

Mivel:

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \int_0^\infty x^{n-2} \cdot e^{-x^2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{n} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)^2$$

Reális gázra:

ε – állapotegyenletből

v – meghatározható

σ^2 – f-fel számolható

Van der Waals egyenlet:

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) \cdot (V - b) = \left(p + \frac{9 \cdot n \cdot k \cdot T_K \cdot V_K}{8 \cdot V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{V_K}{3} \right) = n \cdot k \cdot T = R \cdot T$$

Kritikus pont körül: $\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta V}{V} \cong \frac{l}{\sqrt[4]{n}}; (l = 0.9)$

4. Fényszóródás gázokban

r (törésmutató): $r \approx \sqrt{\varepsilon'}$; $\varepsilon'' \approx 0$

$$\varepsilon = 1 + 4 \cdot \pi \cdot \chi_e; \quad \chi_e \sim N \sim \rho \rightarrow \varepsilon = 1 + 4 \cdot \pi \cdot k \cdot \rho$$

Innen:

$$k \cdot \rho = \frac{\varepsilon - 1}{4 \cdot \pi} = \frac{r^2 - 1}{4 \cdot \pi} = \chi_e$$

$$\Delta(r^2) = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot \Delta\rho = (r^2 - 1) \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Fény hatására polarizáció $\rightarrow$ másodlagos sugárzás azonos frekvenciával

Ingadozás: polarizációs átlag (fénytörés) + sugárzó dipóltöbbslet (fényszórás)

$$\underline{p} = \chi_e \cdot \underline{E} \cdot V$$

$$\Delta \underline{p} = \frac{\Delta(r^2)}{4 \cdot \pi} V \cdot \underline{E} = \frac{(r^2 - 1)}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \Delta\rho}{\rho} \cdot V \cdot \underline{E}$$

Elektrodinamika: rezgő dipólus sugárzása:

$$S \left[\frac{\text{energia}}{\text{idő}} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{c^3} \cdot \left(\frac{d^2(\Delta \underline{p})}{dt^2} \right)^2 = \frac{r}{3 \cdot c^3} \cdot \omega^4 \cdot (\Delta \underline{p})^2$$

Energiaáramsűrűség: $S_0 = \frac{r}{8 \cdot \pi} \cdot c \cdot E^2$

$$S = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot c^3} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot c}{\lambda} \right)^4 \cdot \frac{(r^2 - 1)^2}{(4 \cdot \pi)^2} \cdot \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^2 \cdot V^2 \cdot \underline{E}^2 =$$

$$= S_0 \cdot \frac{32}{3} \cdot \pi^3 \cdot (r^2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} \cdot \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^2 \cdot V^2 \Rightarrow \left[\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\rho \cdot V}} \right]$$

$$= S_0 \cdot \frac{32}{3} \cdot \pi^3 \cdot (r^2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} \cdot \frac{V}{\rho}$$

Kiszóródáshoz tartozó lineáris abszorpciókoefficiens (σ) a kiszórt teljesítménysűrűség és az energiaáramsűrűség hányadosa:

$$\sigma = \frac{\left(\frac{S}{V}\right)}{S_0} = \frac{32 \cdot \pi^3}{3} \cdot (r^2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4 \cdot \rho} [cm^{-1}]$$

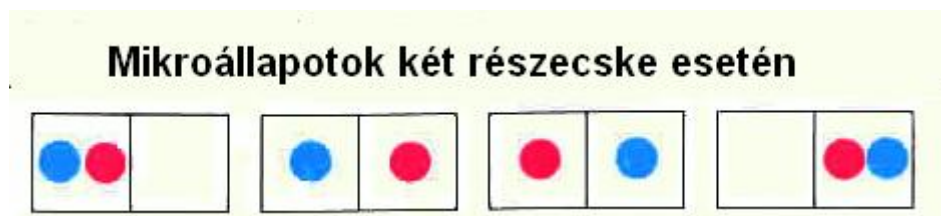
Néhány következmény:

- **vörös fény $\rightarrow$ ködös időben is jól látszik (Van der Waals erők – nagy sűrűség.)**
- **kék az ég („Az égbolt kék színe az atomok létezésének legszembeszökőbb bizonyítéka”)**
- **ρ az r és λ mellett közvetlenül jelentkezik: az Avogadro-szám meghat. [tudománytörténeti érdekesség: az első pontos Loschmidt-szám értékek ilyen mérésekből (mérések az Alpokban $\sim$ 1900 körül)]**

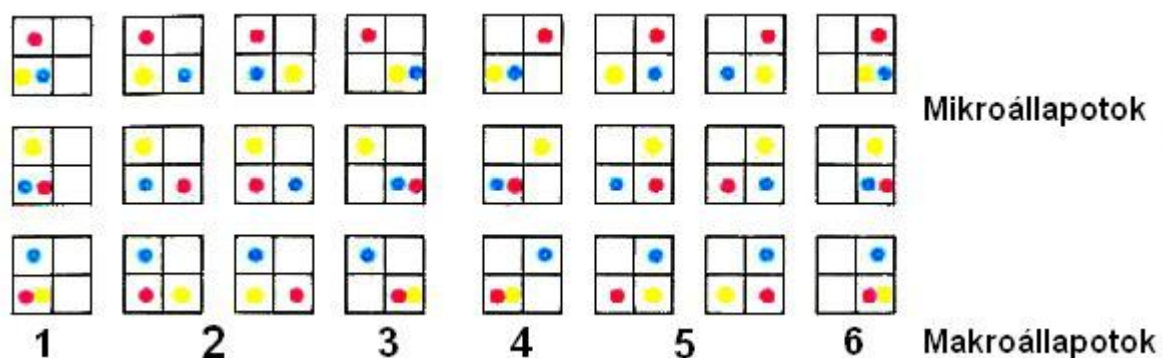
5. A kinetikus gázelmélet elvi alapjai

**Gondolat: a gázok azonos fajtájú,
megkülönböztethető részecskékből; ezek
ütköznek egymással**

Cellák:



Kül. mikroállapotok → azonos makroállap.



$W \rightarrow$ val., hogy egy részecske egy cellában

Független részecskére:

$W^N \rightarrow$ egy mikroállapotra

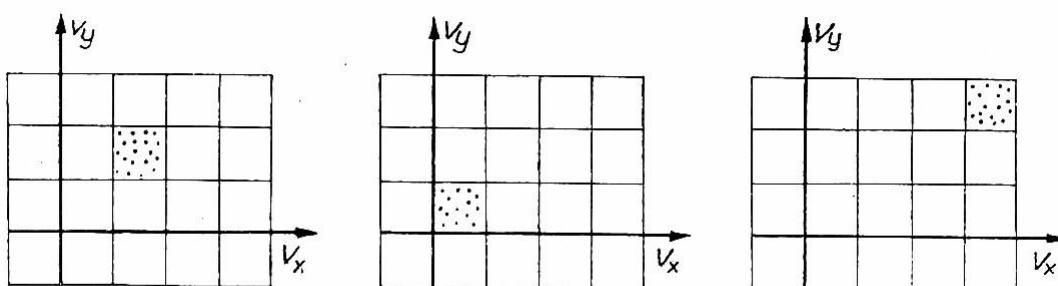
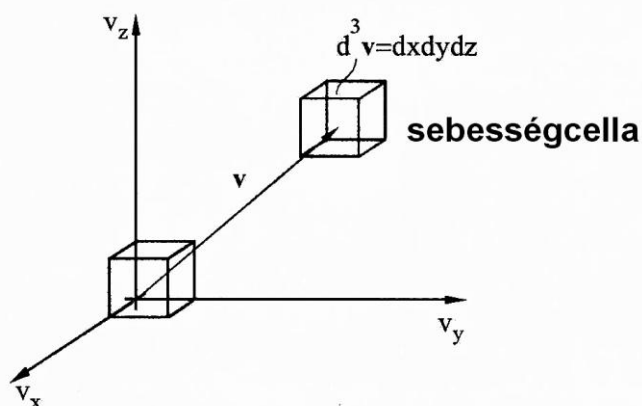
$$W_{MAKRO} = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \dots \cdot N_k!}$$

Nagy részecskeszámnál a maximumra:

$$N_1 = N_2 = \dots = N_k$$

Pédául 3 cellára: $W(9,0,0) \cdot 1680 = W(3,3,3)$

Sebességtér



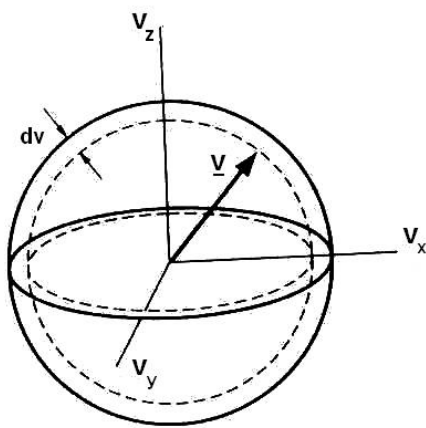
A mikroállapotok összenergiája különböző

$$W_{MACRO}^{SebTér} = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \dots \cdot N_k!}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m \cdot v_i^2; E_0 = N_1 \cdot E_1 + N_2 \cdot E_2 + \dots + N_k \cdot E_k$$

$$\sum_i N_i = N$$

$Z_i \rightarrow$ cellák száma az i-dik sebességhéjban



$$Z_i = \frac{4 \cdot \pi \cdot v_i^2 \cdot dv_i}{\Delta V_v}$$

Ezzel:

$$W_{MAKRO} = \frac{N!}{\prod_i N_i!} \cdot \prod_i (Z_i^{N_i})$$

A Stirling-formula segítségével:

$$n! = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \rightarrow$$

$$\ln n! = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2} \cdot \ln(2 \cdot \pi \cdot n) \approx n \cdot \ln n$$

Így:

$$\ln W = N \cdot \ln N + \sum_i (N_i \ln Z_i - N_i \cdot \ln N_i)$$

Teljesül: $\sum_i N_i = N; \sum_i N_i \cdot E_i = E_0$

W szélsőértéke α és β multiplikátorokkal:

$$\frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \cdot \ln N + \sum_i (N_i \cdot \ln Z_i - N_i \cdot \ln N_i) + \alpha \cdot \left(N - \sum_i N_i \right) + \beta \cdot \left(E_0 - \sum_i N_i \cdot E_i \right) \right] = 0$$

$$N_i = \frac{Z_i}{\exp(\alpha + 1 + \beta \cdot E_i)} = A \cdot e^{-\beta \cdot E_i}$$

Maxwell–Boltzmann statisztika

**Meg fogjuk mutatni, hogy β a részecskék
átlagos energiájával arányos**

$$\beta = \frac{1}{k \cdot T} = \text{konst.}(T = \text{konst.})$$

Ideális gáz → a részecskék csak ütköznek:

$$N_i = A \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{m \cdot v^2}{k \cdot T}}$$

$$dN(\underline{v}) = A' \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{k \cdot T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

A sűrűség ρ

$$\rho(v_x, v_y, v_z) = A' \cdot \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2 \cdot k \cdot T}\right)$$

$$N = \int dN = \iiint \rho(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z; \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot v_x^2}{2 \cdot k \cdot T}\right) dv_x = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot v_x^2}{2 \cdot k \cdot T}\right) d\left(\sqrt{\frac{m}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot v_x\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}} \cdot \sqrt{\pi}$$

Ezzel:

$$N = A' \left(\sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot T}{m}} \right)^3 \rightarrow \mathbf{A' \text{ adódik}}$$

$$A' = N \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot T} \right)^3}$$

$$\rho(v_x, v_y, v_z) = N \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot T} \right)^3} \cdot e^{\left(-\frac{m}{2 \cdot k \cdot T} \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right)}$$

Ez az egyes sebességekhez tartozó eloszlás

Sebességeloszlás:

$$\rho(v)dv = 4 \cdot \pi \cdot v^2 \cdot dv \cdot A' \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}} =$$

$$= N \cdot 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T}\right)^3} \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot v^2 \cdot dv$$

**Ez a Maxwell-féle sebességeloszlás
Kinetikus energiaeloszlás**

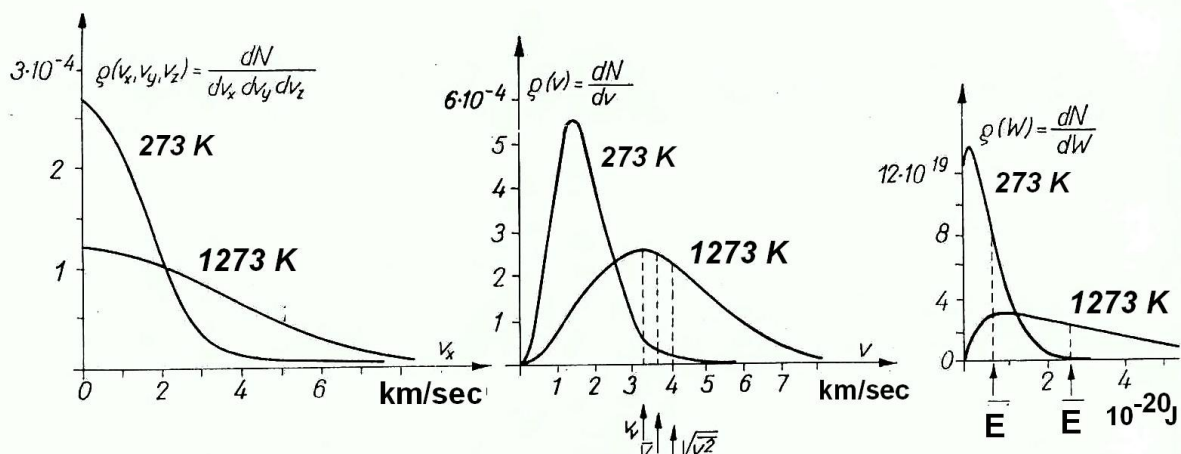
E; E + dE

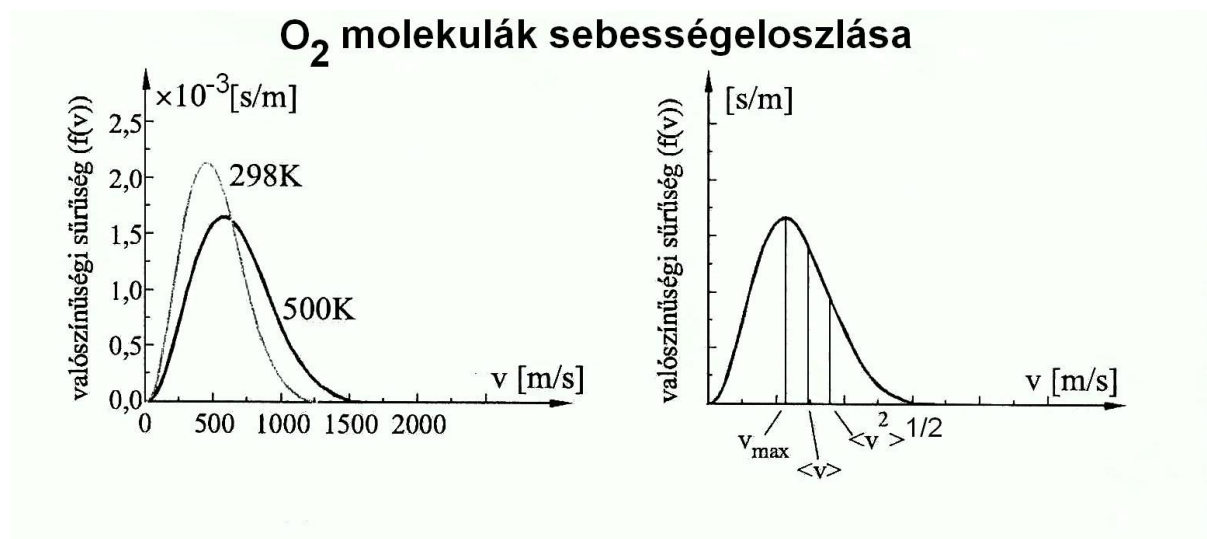
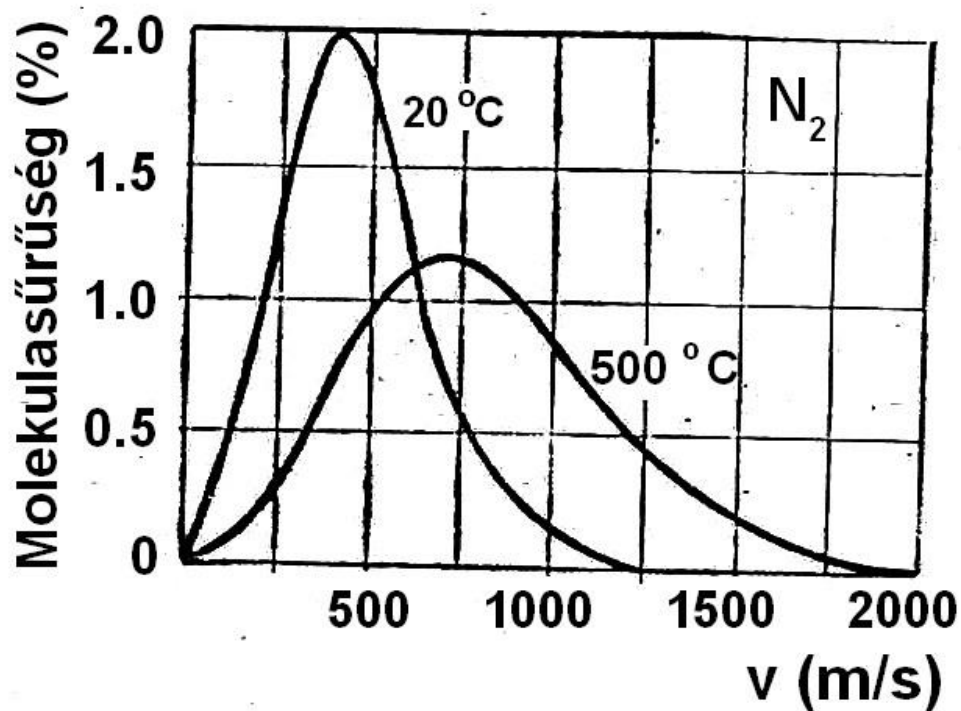
$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = E; v \cdot dv = \frac{dE}{m}; v = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot E}$$

$$\rho(E)dE = 2 \cdot \pi \cdot N \sqrt{\frac{1}{(\pi \cdot k \cdot T)^3}} \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-\frac{E}{k \cdot T}} dE$$

**Kísérletek → a kritikus ponttól távol igen jó
egyezés**

ELOSZLÁSOK H-GÁZRA





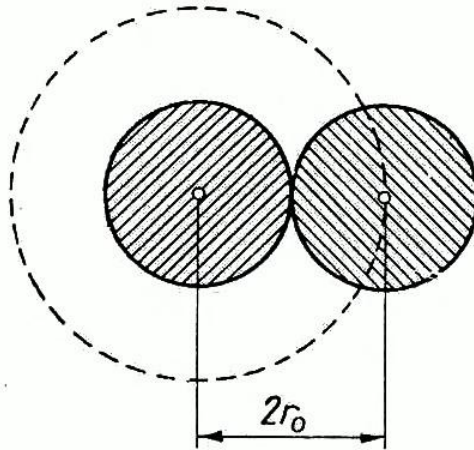
$v_{\max}$, $v_{\text{átlag}}$ és az átlagos energiához tartozó sebességek különböznek

Átlagsebességek $0\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékleten

Gáz	H_2	H_2O	Ne	N_2	O_2	CO_2	Hg
$v(\text{km/s})$	1.693	0.567	0.536	0.454	0.425	0.362	0.17

- **A szabad úthossz: az ütközések közötti távolság átlagos hossza**

Mi $\rightarrow$ egyszerű gondolatmenet, amely a lényegét mutatja, eredménye $\rightarrow$ közel a pontos értékhez



$\rightarrow$ n_1 számú áll, n_2 számú mozog:

$$n_1 \left(\frac{\text{rész}}{m^3} \right); \text{felület} \rightarrow n_1 \cdot (2 \cdot r_0)^2 \cdot \pi \cdot dx$$

$$n_2 \left(\frac{\text{rész}}{m^3} \right); \text{szórás} \rightarrow -dn_2 = n_1 \cdot n_2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 \cdot dx$$

$$n_2 = n_{20} \cdot e^{-n_1 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 \cdot x}$$

$$\lambda = \bar{x} = -\frac{1}{n_{20}} \int_0^\infty x dn_2 = \frac{1}{n_{20}} \int_0^\infty x \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{n_{20}} \int_0^\infty x \cdot n_{20} \cdot e^{-n_1 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 \cdot x} \cdot n_1 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot n_1 \cdot (2 \cdot r_0)^2}$$

Hiba: csak az egyik mozog $\rightarrow$ ha mindkettő:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot n \cdot (2 \cdot r_0)^2}$$

Egy molekula másodpercenkénti ütközése:

$$Z = \frac{v}{\lambda} = \sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 \cdot \sqrt{v^2}; \rightarrow \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}}$$

$$Z = \sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot (2 \cdot r_0)^2 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}}$$

Szabad úthossz mérése:

→ gázba nyaláb, mérni az intenzitás-
csökkenést → nehéz mérések

λ és n kapcsolata:

$$2 \cdot r_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot n \cdot \lambda}}$$

Cseppfolyósított gázra a térfogat:

$$V \approx \frac{4 \cdot \pi \cdot r_0^3}{3} \cdot n$$

Ez 1 m³ normál állapotú gázra cseppfolyós
térfogat → n ismert → ebből az
Avogadro-szám meghatározható

Szabad úthossz

0 °C, 1 torr (133 Pa)	H ₂	levegő	CO ₂	Xe
λ (mm)	0.0839	0.0454	0.0395	0.0264
ütközés/sec	$4.35 \cdot 10^7$	$2.12 \cdot 10^7$	$2.66 \cdot 10^7$	$1.72 \cdot 10^7$

Megmutatjuk, hogy $\rightarrow \beta = \frac{1}{k \cdot T}$

$$\rho(v)dv = 4 \cdot \pi \cdot N \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot \beta^{-1}}\right)^3} \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot \beta^{-1}}} \cdot v^2 dv$$

$$\frac{E_0}{N} = \frac{1}{N} \cdot \int_0^\infty \rho(v) \cdot \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right) dv =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot N \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot \beta^{-1}}\right)^3} \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot \beta^{-1}}} \cdot v^2 dv =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot \beta^{-1}}\right)^3} \cdot \int_0^\infty v^4 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot \beta^{-1}}} dv$$

$$\left[\int_0^\infty x^4 \cdot e^{-a \cdot x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \cdot a^{\frac{n+1}{2}}}; \Gamma(x+1) = \Pi(x) = \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t} dt = x \cdot \Pi(x-1) \right]$$

Eredmény:

$$\frac{E_0}{N} = \pi \cdot \frac{m \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}}{2 \cdot \beta^{-1}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \beta^{-1} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Ez T definíciója

$k \rightarrow$ Boltzmann-állandó: $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$