2.2. AZ ANYAGHULLÁMOK

A fénynél nem tudtunk dönteni:

- ***markáns hullámjelenségeket mutat***
- ***más jelenségekben részecskének látszik***

Elektron:

- **eddig mindenütt részecske (pl. e/m kísérlet)**
- ***hullámtulajdonságot mutat-e valahol?***

[LOUIS DE BROGLIE (1892-87), 1924-27: részecskehullám, Nobel-díj 1929]

gondolat: itt is $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ **→ alapvető felismerés**

1. Az elektronok elhajlása

[C.L. DAVISSON (1881-1958), Nobel-díj 1937 L.H. GERMER (1896-1971)]

Davisson-Germer kísérlet, 1927

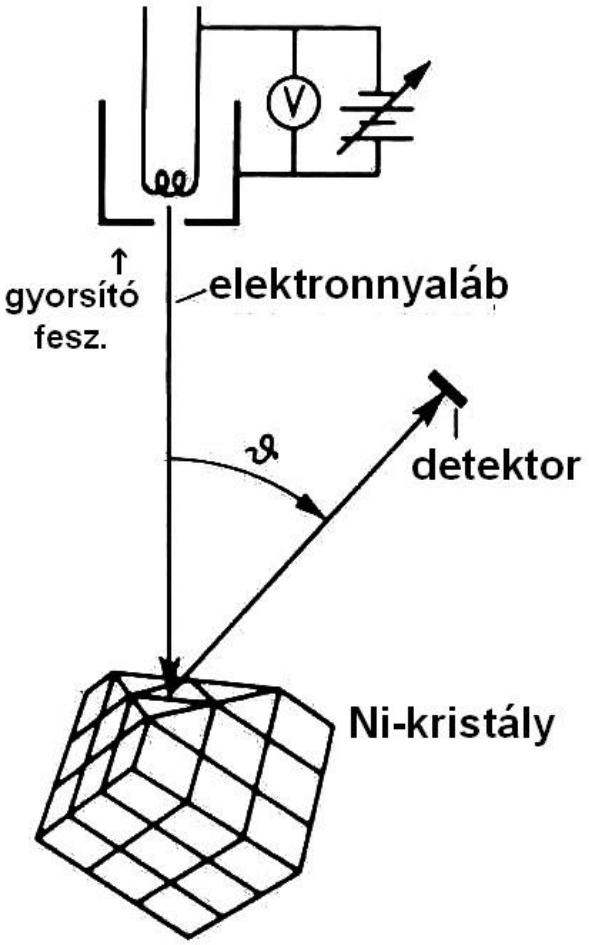
Kísérlet: vákuumcsövek elektródjainak szekunder-emissziója

Eredetei ötlet: visszavert elektronok eloszlásából → atomok elektromos terére következtetni

Eloszláskép → lényegesen függ a céltárgy kristályszerkezetétől

Alkalmazott minta: köbös, lapcentrált nikkelkristály

Davisson – Germer I. kísérlet (1. elrendez.)



vizsgált: (1,1,1) sík, háromsz. szimmetriával

(szilárdtest-fiz.: rtg. diffrakció elméletével)

- **visszavert hullámok meghatározott λ-nál meghatározott irányokban erős**

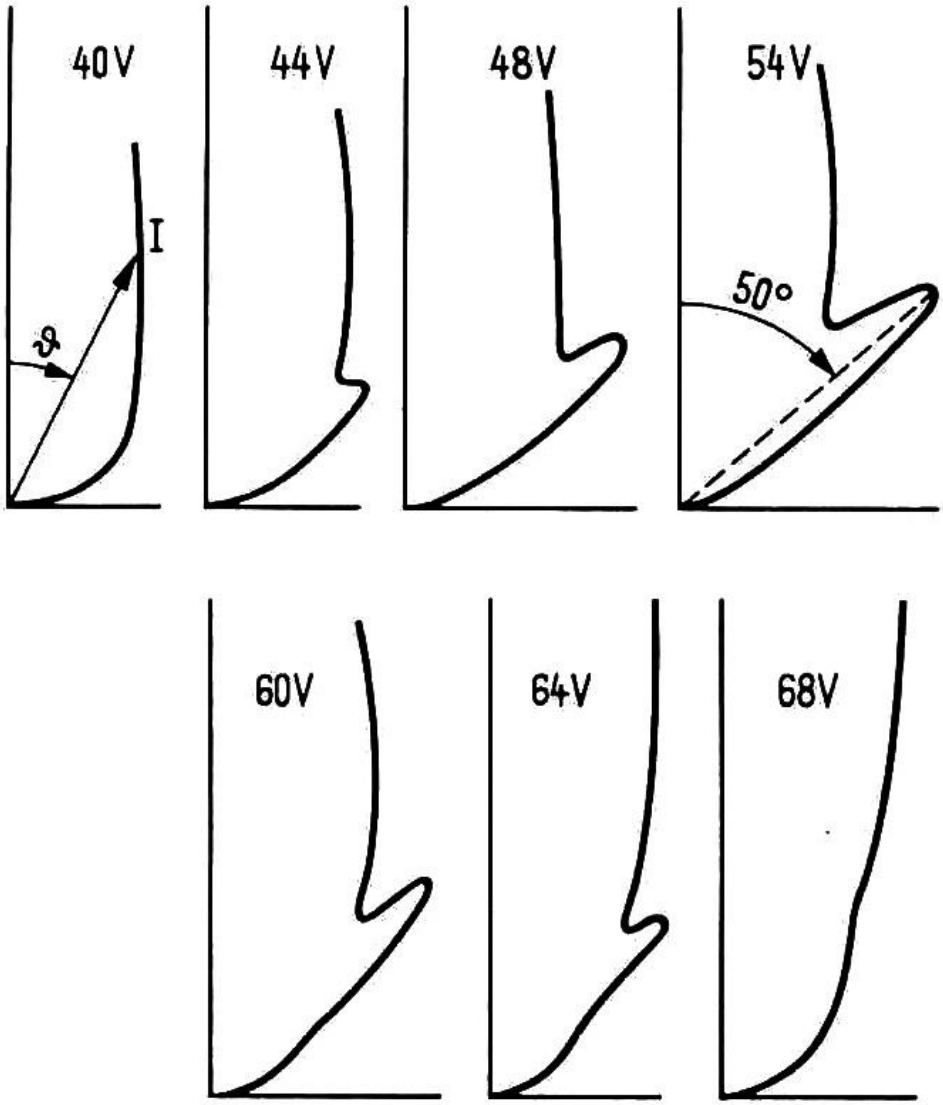
λ hullámhossz, számítása de Broglie szerint

$$e \cdot V = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v << c \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V}} = \frac{12.25}{\sqrt{V}} \cdot 10^{-10} m$$

Pl. $V_{\lambda=1.67Å}$ = 54 V

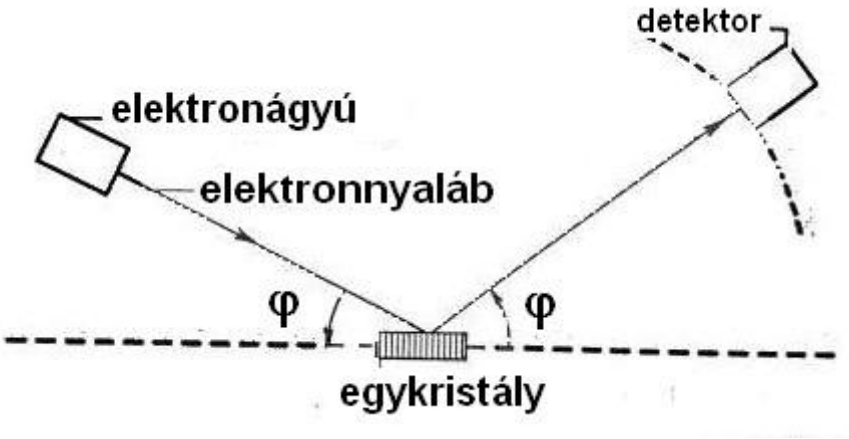
Mért: elektronok intenzitása a kristálytani szimmetriasíkban a beeső nyaláb és a detektor iránya függvényében kül. λ-nál

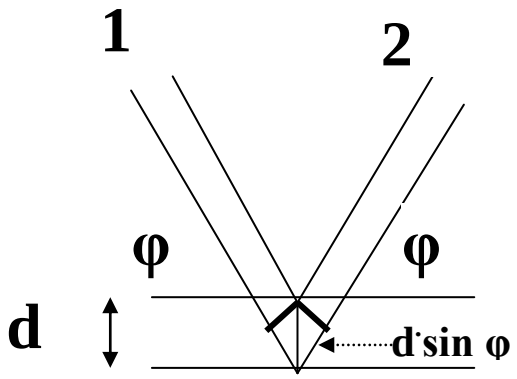


Eredmény: markáns interferenciajelenség

2. elrendez.: tükrös visszaverődés vizsgálata

→ a hullámtulajdonságra való közvetlen rákérdezés





útkülönbség az 1 – 2 nyalábút között:
$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sin\varphi$

Interferencia feltétele

$2 \cdot d \cdot \sin\varphi = n \cdot \lambda$ → Bragg-feltétel

Elektronokra (ebben a kísérletben):

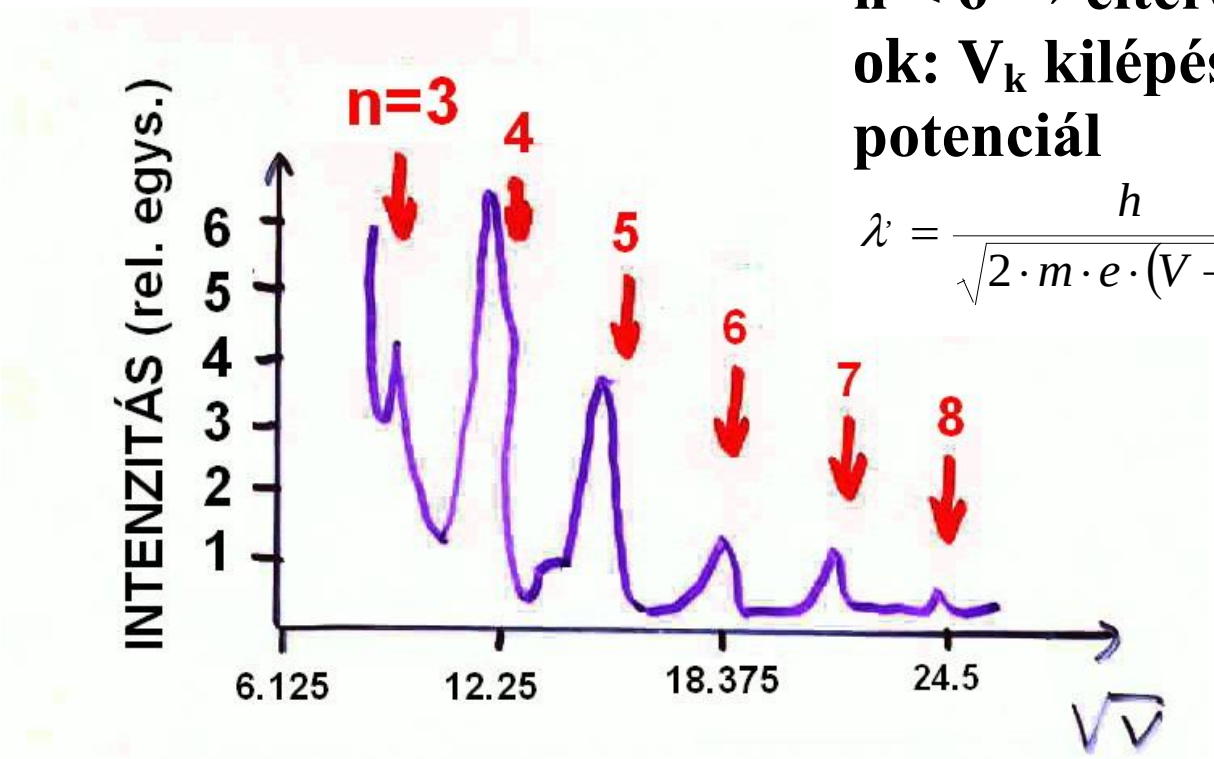
$$2 \cdot d \cdot \sin\varphi = n \cdot \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V_n}}$$

$$\sqrt{V_n} = \frac{h}{2 \cdot d \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot e}} \cdot n = K \cdot n$$

Eredmény:

n < 6 → eltérés ok: V_k kilépési potenciál

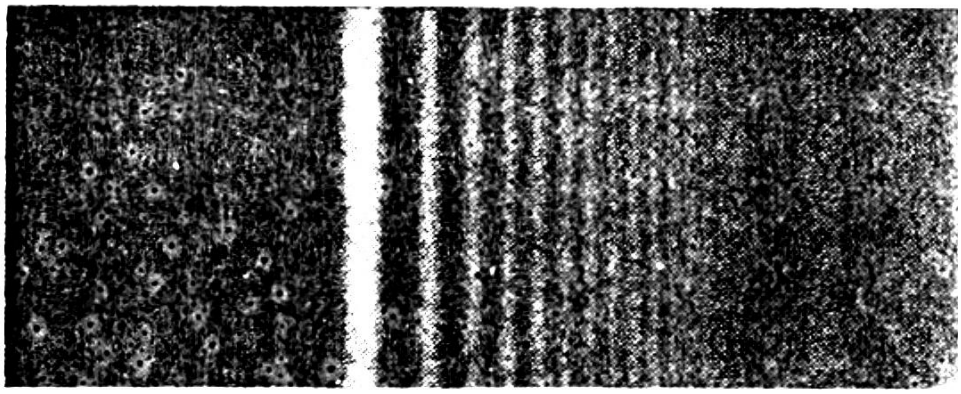
$$\lambda' = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot (V + V_k)}}$$



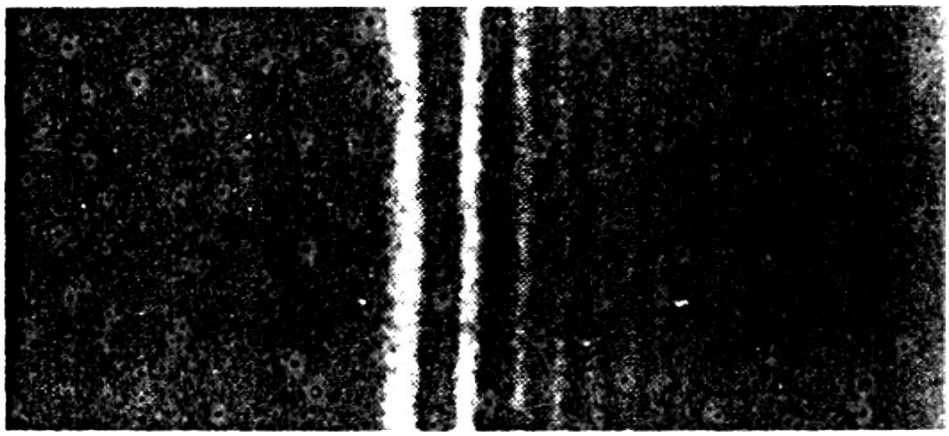
Időben később:

- **fólián áthaladó nyalábbal**
- **kristály szélén való elhajlás (Boersch 1940; Al_2O_3 kristályon)**
- **mesterséges vonalrácson is**
- **igen alacsony intenzitáson is**

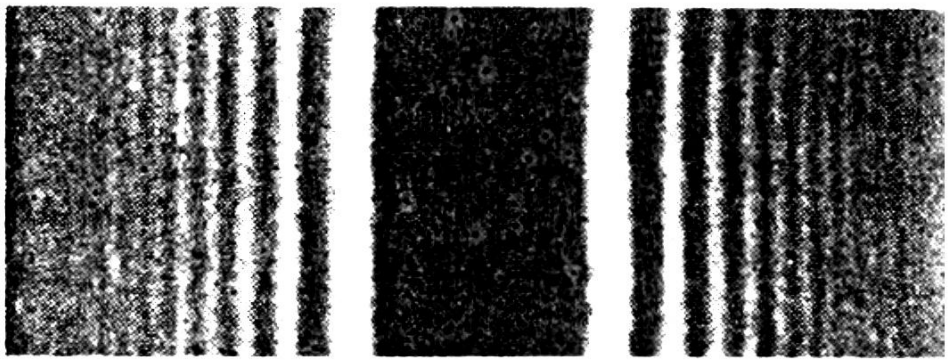
Fényelhajlás félsíkon



34 keV-es elektronok elhajlása félsíkon



20 keV elektronok elhajlása 2 mikronos aranyszálon



Eredmények összefoglalása:

az elektronok

- **hullámtulajdonságokat mutatnak**
- **egyetlen elektron is mutatja**
- **a hullámhossz nagy pontossággal λ=h/p**

→A helyzet hasonló az EM jelenségekhez.

2. Atom- és molekulanyalábok elhajlása

Kérdés: más mikrorészecske mit mutat?

Van-e általános hullám-tulajdonsága az anyagnak? ***Igen fontos kérdés!***

A kísérleti vizsgálat: 1929-ben

[OTTO STERN (1888-1969), 1943 Nobel-díj]

Kísérlet: atom- és mol. nyalábok elhajlása

[$E_{átl}$=3/2·(k·T) → átlagos imp. $p=\sqrt{3\cdot m\cdot k\cdot T}$

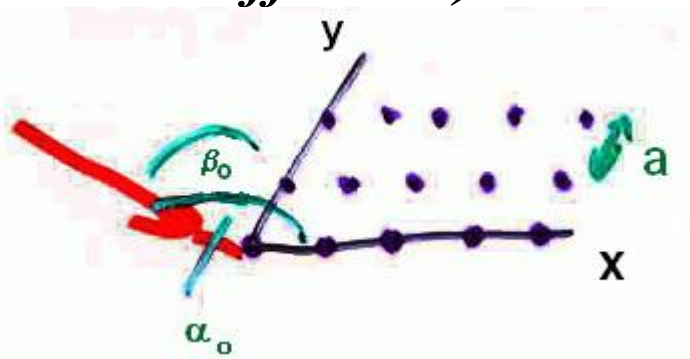
T hőmérsékleten:

$$\bar{\lambda}=\frac{h\cdot\sqrt{N_{Avogadro}}}{\sqrt{3\cdot M\cdot R\cdot T}}=\frac{30.4}{\sqrt{M\cdot T}}\cdot 10^{-10}m$$

Pl.: T=300 K → H_2 → $\bar{\lambda}=1.3\cdot 10^{-10}m$

He→ $\bar{\lambda}=0.9\cdot 10^{-10}m$**]**

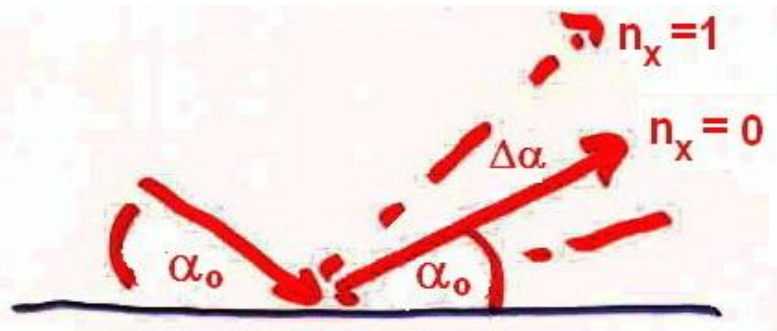
Kísérleti különbség: ezek a nyalábok nem hatolnak be az anyagba, csak a felületi réteg számít *(sík, kétdimenziós rácson való diffrakció)*



$$a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = n_x \cdot \lambda$$
$$a(\cos\beta - \cos\beta_0) = n_y \cdot \lambda$$

Ha a beeső nyaláb (x,z) síkban

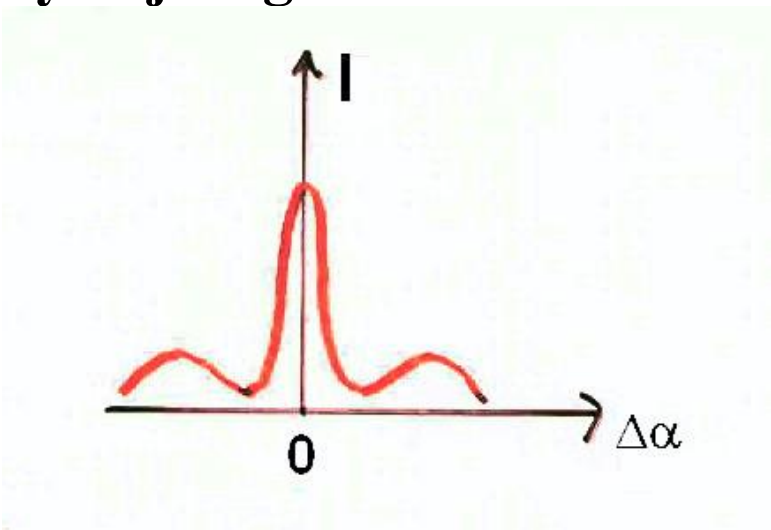
$$\beta_0 = \pi/2 \rightarrow n_y = 0$$



$$a(\cos\alpha_n - \cos\alpha_0) = n_x \cdot \lambda$$

Kísérlet: He atomnyaláb
H_2 molekulanyaláb } **szórás alkáli-halogén sókristályon**

Eredmények jellege



A kísérletek nehezek, mert

- **monoenergiás nyaláb és**
- **jó detektor kell**

Sok hasonló kísérlet → de Broglie képlete nagy pontossággal igaz minden részecskére

→ Hullámtulajdonságok: az anyag általános tulajdonsága!

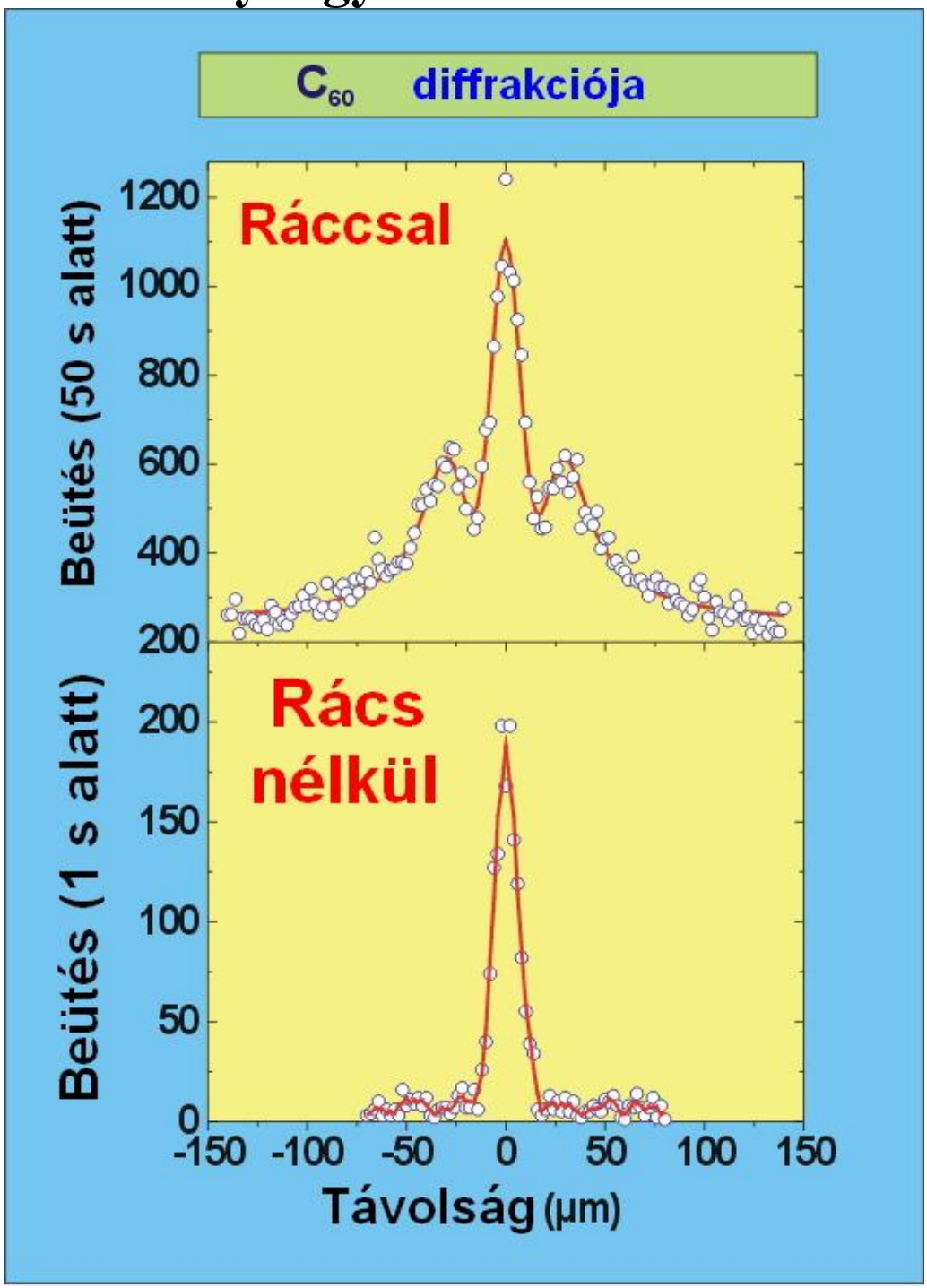
Nature 401, 680-682, 14.October 1999

Bécsi Egyetemen: C_{60} hullámtulajdonságai

$C_{60\ nyaláb}$ ~900 K-nél; $v_{átl.}$ ~ 210 m/s *(λ~.5 pm)*

Probléma: rács → koherens fénynyaláb

Eredmény: egyértelműen hullám!



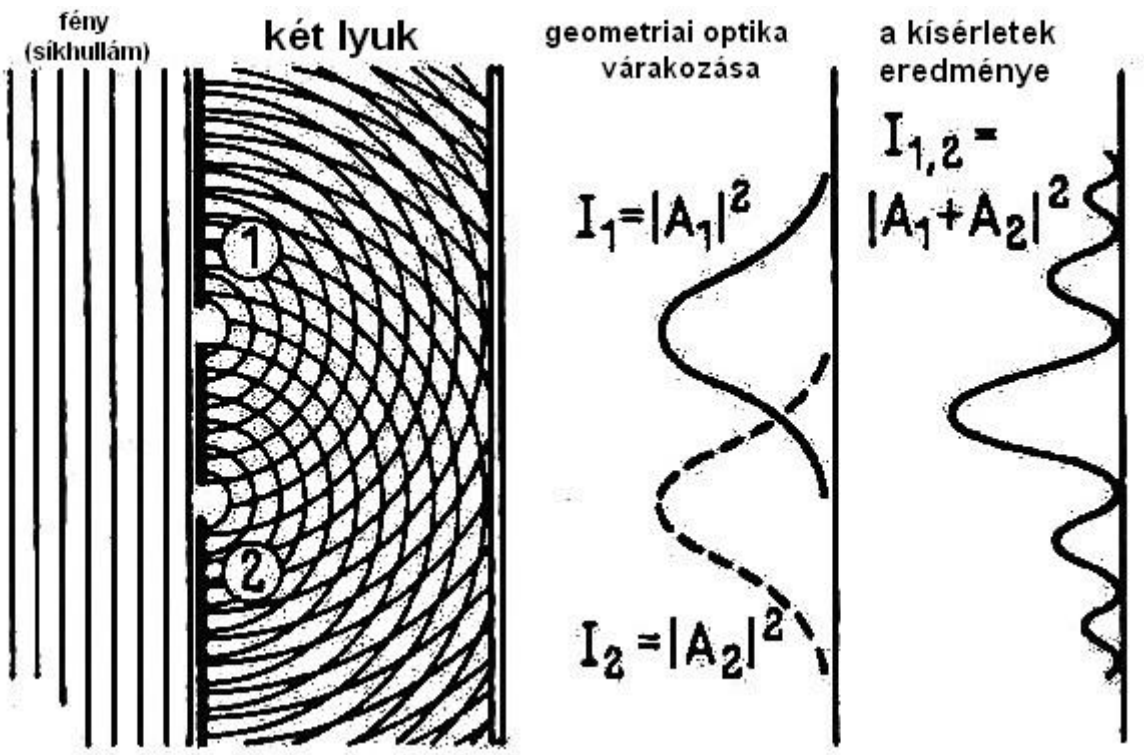
3. *A hullámcsomag*

Anyaghullám

- **kísérleti tény**
- **a klasszikus fizika nem érti**

Két lyuk kísérlet EM sugárzással

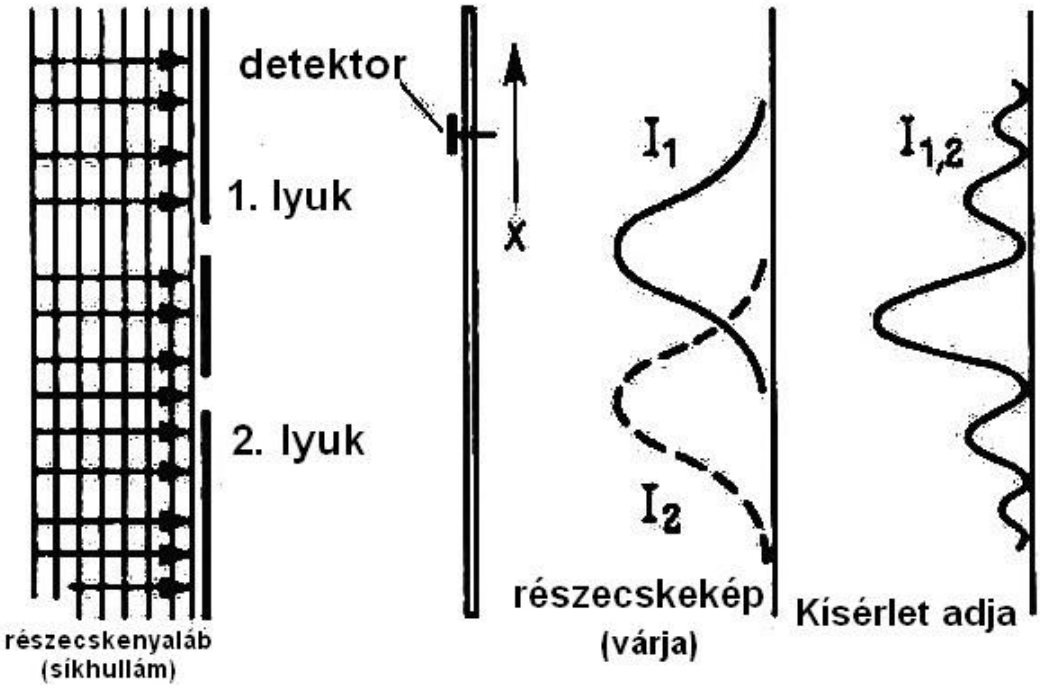
$$A_1 = \alpha_1 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t+\varphi_1)}; A_2 = \alpha_2 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t+\varphi_2)}; \delta = \varphi_2 - \varphi_1$$



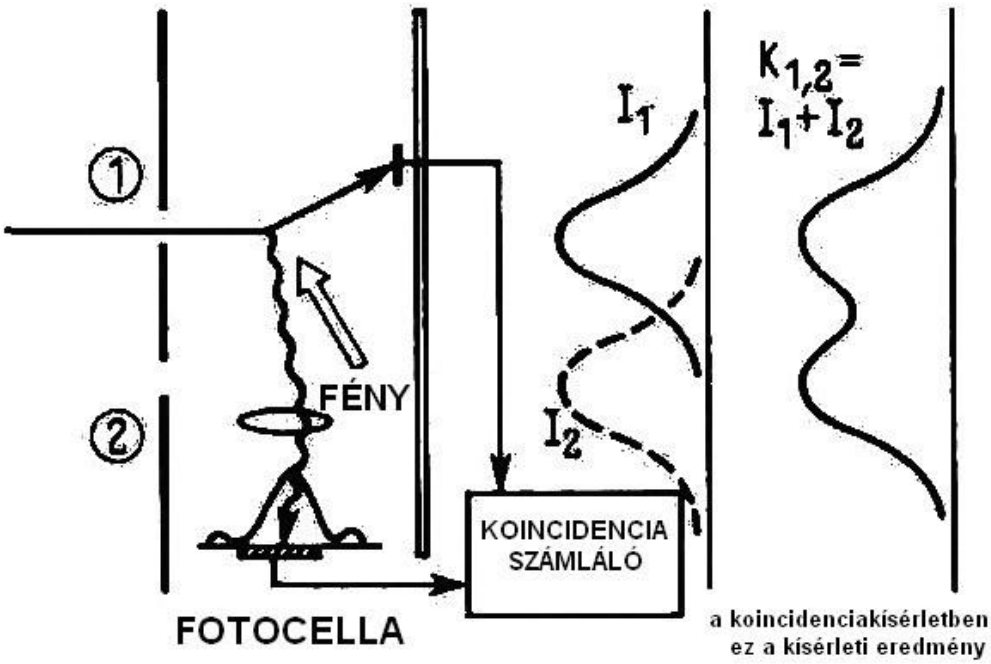
$$I_{12} = \left|A_1 + A_2\right|^2 = \left|e^{i\omega t}\right|^2 \cdot \left|\alpha_1 \cdot e^{i\varphi_1} + \alpha_2 \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\delta)}\right|^2 =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\cdot\sqrt{I_1 \cdot I_2}\cdot\cos\delta \Rightarrow 0 \le I_{12} \le 4\cdot I$$

Két-lyuk kísérlet elektronnyalábbal



Az előbbi kísérlet kiegészítve: merre megy az elektron?



Ok: fény impulzust ad át → kisebb, ha növeljük a hullámhosszt → hatása eltűnik, ha már nem lokalizál

Az elektron:

- **mindig oszthatatlannak látszik**
- **egyetlen elektron is interferál**
- **az interferencia eltűnik minden olyan kísérletben, ahol az utat is meghatározzuk**

A kísérletek kikövetelik → a részecskékhez interferenciaképes amplitúdót kell hozzárendelni

P(x) → valószínűségsűrűség: P(x)dx annak a valószínűsége, hogy x és x+dx között detektáljuk

→ interferenciaképes amplitúdó négyzete

Ψ **→ valószínűségi amplitúdó**

$$P(x) = |\Psi(x)|^2$$

→ Több lehetséges út esetén az egyes utak valószínűség-amplitúdói összeadódnak

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \rightarrow P = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$$

Általában: $\Psi = \Sigma_i \Psi_i$

akkor igaz, ha elvileg nem lehet eldönteni, melyik út valósult meg

→ ha az egyes utak szétválnak, akkor

$$P = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$$

Milyen legyen Ψ? → *analógia*
Láttuk: síkhullám ilyen tulajdonságú

$$\Psi = A \cdot e^{i(k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

[A ált. komplex szám; nem játszik szerepet]
Mi $\underline{k}$ és ω?

E → invariáns t transzformációra
p → invariáns x transzformációra

Megmutatható, hogy

$\underline{p} \cdot \underline{r} - E \cdot t$ Lorentz-invariáns

Ötlet:

$$E = \hbar \cdot \omega; \underline{p} = \hbar \cdot \underline{k} \Rightarrow$$

$$\Psi = A \cdot \exp\left(i\left(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega \cdot t\right)\right) = A \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\underline{p} \cdot \underline{r} - E \cdot t\right)\right)$$

Ψ → Lorentz-invariáns

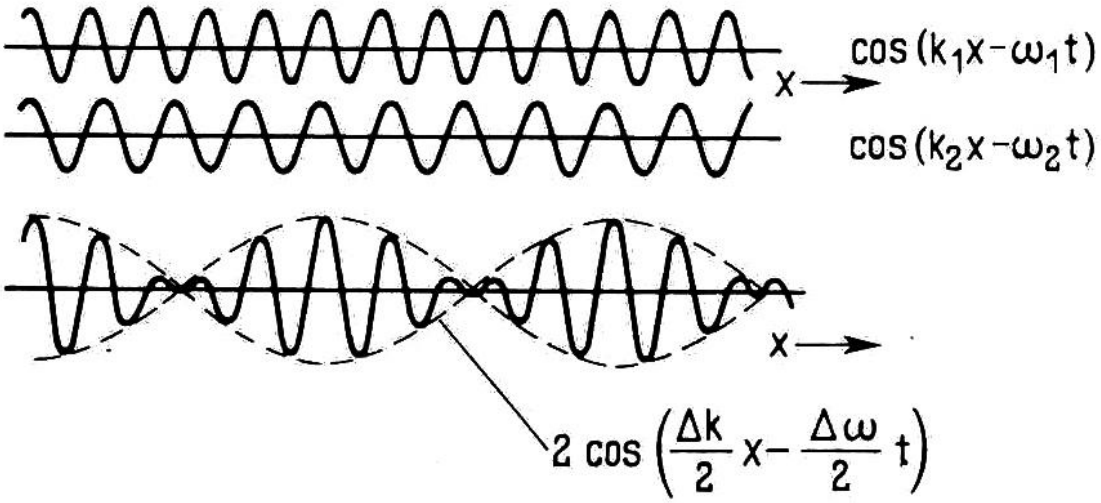
- **ha $\underline{p}$ és E határozott: a részecske sem térben, sem időben <u>nem</u> lokalizálható $P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \text{konst.}$**
- **Ψ vezessen térben és időben lokalizálható részecskére → *nem lehet határozott a hullámhossz!* (csak ilyen közvetíthet jelet)**

[modell: két hullámvonulat,
$\omega_1 \sim \omega_2$, $\underline{\mathbf{k}}_1 \sim \underline{\mathbf{k}}_2 \rightarrow$ eredmény: lebegés

$$\Psi(x,t) = e^{i(k_1 \cdot x - \omega_1 \cdot t)} + e^{i(k_2 \cdot x - \omega_2 \cdot t)} =$$

$$= e^{\frac{i}{2}((k_1+k_2)\cdot x - (\omega_1+\omega_2)t)} \cdot \left[e^{\frac{i}{2}((k_1-k_2)\cdot x - (\omega_1-\omega_2)t)} + e^{-\frac{i}{2}((k_1-k_2)\cdot x - (\omega_1-\omega_2)t)} \right] =$$

$$= e^{i\left(\left[\frac{k_1+k_2}{2}\right]\cdot x - \left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right]\cdot t\right)} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\left[\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t\right]\right)$$



A burkoló fázissebessége:

$$v_{cs} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

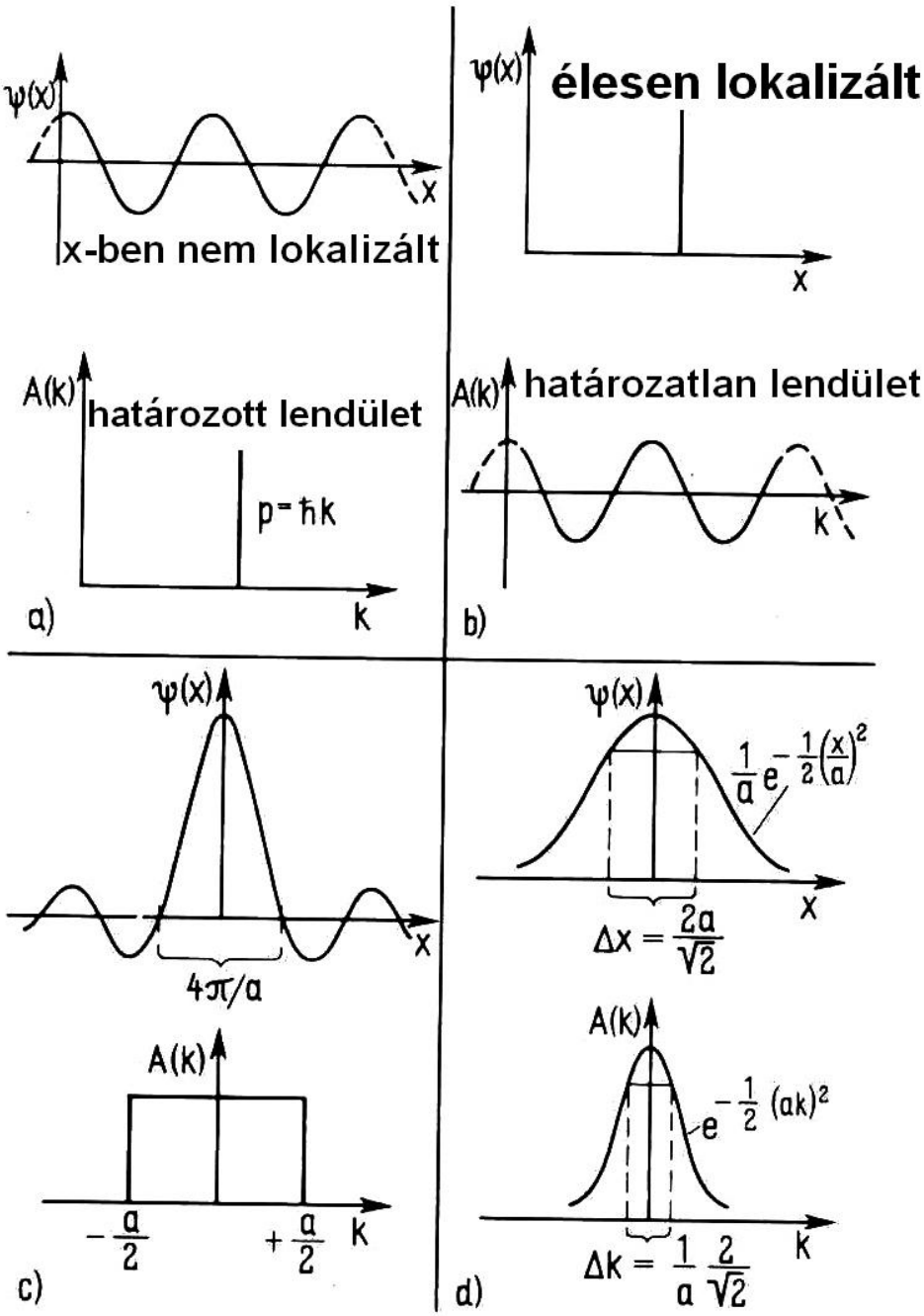
A modell gyengesége a végtelenség
adott t-nél 0 < φ < π között a részecske
meghatározatlan helyű

$$\rightarrow \frac{\Delta k \cdot \Delta x}{2} = \pi \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = 2 \cdot \pi$$ **]**

Igazi hullámcsomag → a hullámszámok egy tartományban folytonosak

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \cdot e^{-i \cdot k \cdot x} dx$$



Lényeg: Δx·Δk alulról korlátos
Megmutatható: Gauss-alaknál
→ Δx·Δk itt a legkisebb

$$\Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Heisenberg-féle határozatlansági reláció
[WERNER KARL HEISENBERG (1901-1976)
hat. rel. 1927; Nobel-díj 1932]

[csoportsebesség:

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$W = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4} = \hbar\omega; \underline{p} = \hbar \cdot \underline{k}$$

$$v_{cs} = \frac{dW}{dp} = \frac{2 \cdot p \cdot c^2}{2 \cdot \sqrt{p^2 \cdot c^2 + E_0^2}} = \frac{p \cdot c^2}{W} = \frac{p}{m} = v$$

v → klassz. seb.]

Eddig: exp(i·k·x)-el foglalkoztunk.
→ exp(i·ω·t) tag → hasonló

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

[A kvantumelmélet megmutatja:

- **ΔE → energiabizonytalanság,**
- **Δt → a rendszer karakterisztikus ideje]**

Kvantumfizika: a határozatlansági reláció az egyik pillére

Klasszikus fizika: hely és impulzus elvileg van

Kvantumszemlélet: elvileg sincsenek pontos koordináták (pályafogalom: mikrovilág → nincs értelme)

Paraméterek egyszerre való meghatározása nem mindig lehetséges (komplementer mennyiségek)

Ilyenek: hely – impulzus
élettartam energia stb.

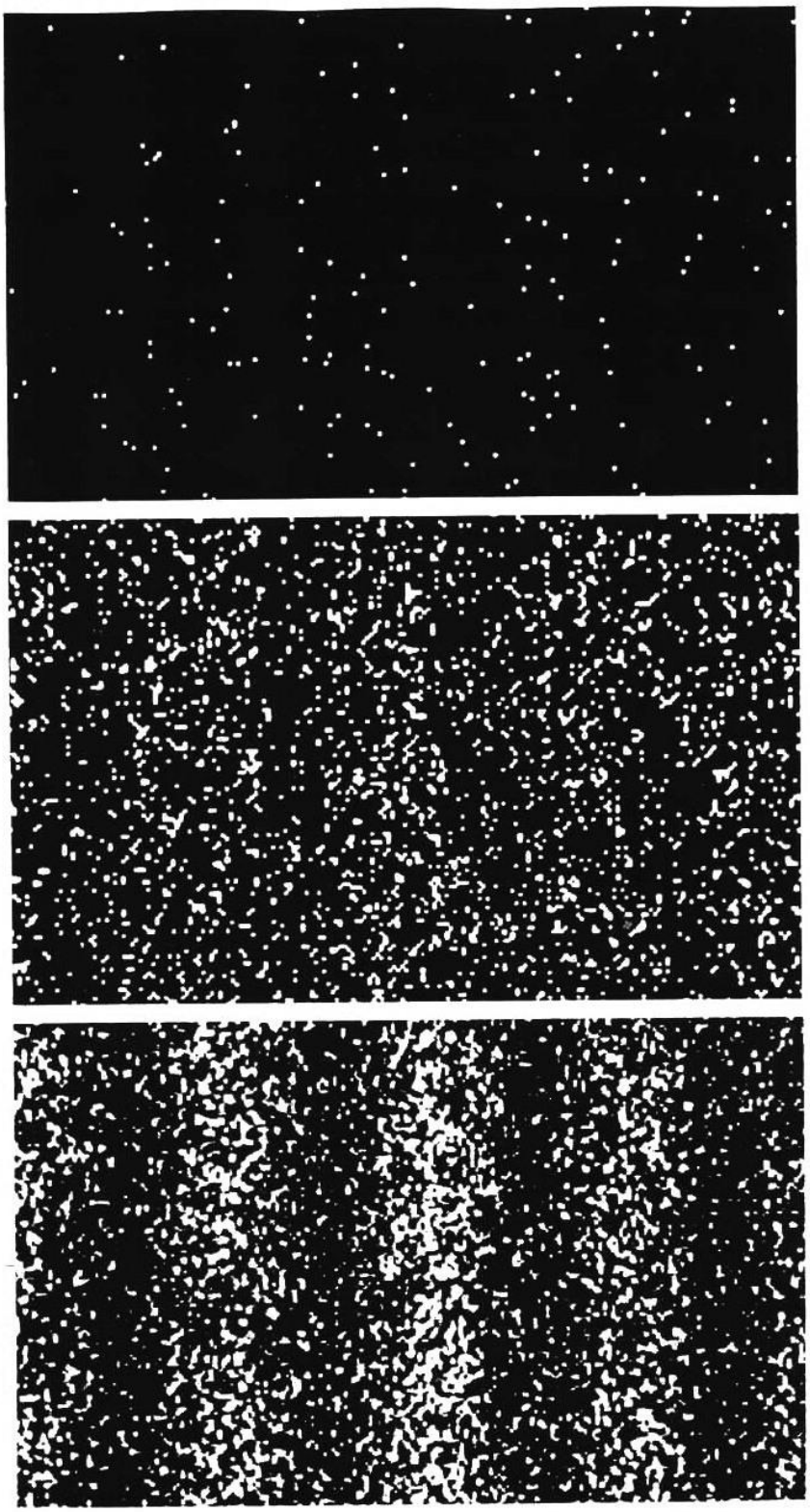
- **A határozatlansági reláció a mikrovilág objektív törvényszerűsége (nem a kísérletező ügyetlensége; *a mérőrendszer és az objektum kölcsönhatása nem hanyagolható el*)**
- **A kísérletek jellegzetessége: sok esemény együtt → interferencia**
  valószínűségi koncepció: a kvantumfizikában nem találunk olyan változót, amely meghatározná az elemi folyamatok pontos lefolyását →
  (feltételezzük: nincs is ilyen változó)

Valószínűségi jelleg → nem következmény, hanem elsődleges tulajdonság

Fizika: reprodukálható kísérletek
Itt: az átlagos viselkedés reprodukálódik

Kvantumfizika → átlagokkal számol

Példa: elektronok szóródása kristályrácson



100 elektron

3000 elektron

70000 elektron